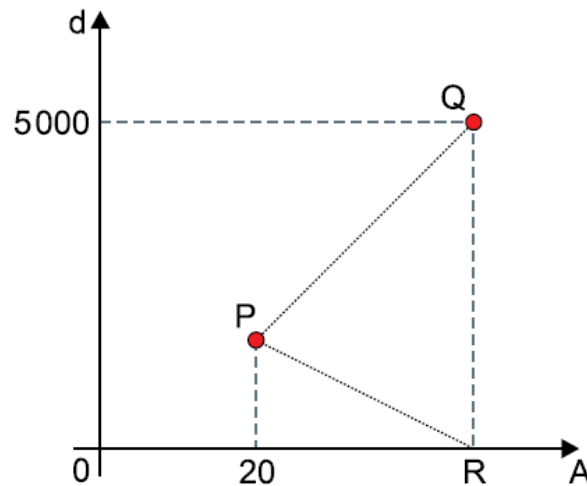


Resolução Insper – 2019.2

26) O gráfico indica a densidade demográfica d , em habitantes por km^2 , em função da área A , em km^2 , das cidades P e Q.



Se a área do triângulo PQR é igual a 30 000 unidades de área do sistema de eixos ortogonais, então a cidade

- A) P tem densidade demográfica de 2 250 hab/ km^2 .
- B) Q tem 150 000 habitantes.
- C) Q tem 300 000 habitantes.
- D) P tem densidade demográfica de 2 000 hab/ km^2 .
- E) Q tem 160 000 habitantes.

Resolução:

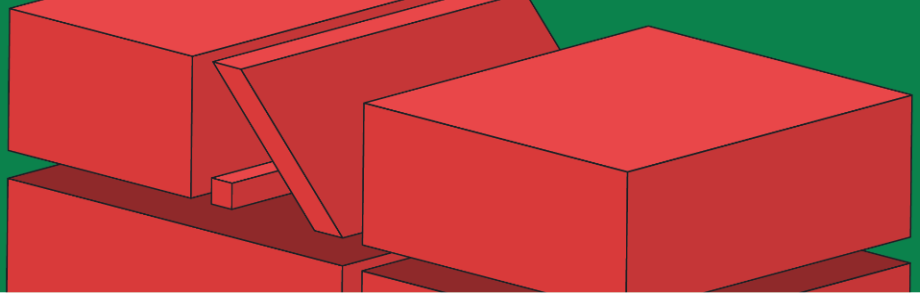
A área do triângulo é 30.000 unidades de área.

Assim, nosso primeiro passo é calcular a área desse triângulo, levando em conta que:

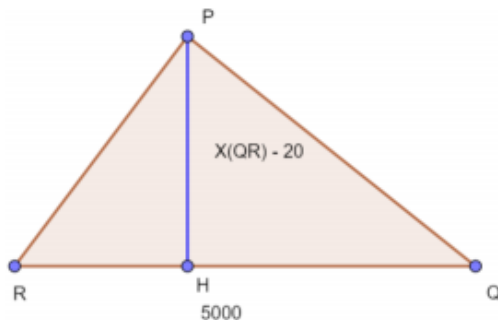
- A base que consideraremos é, justamente, o lado QR;]
- A altura relativa essa base é justamente a distância de P para o lado QR, que por sua vez, é dada por quanto andamos de P para QR no eixo x.

OBS: Note que a distância ao lado QR é dada por $x_{QR} - x$, pois não há movimento no eixo y - não estamos subindo nada, a altura deve ser, nesse caso, horizontal, a fim de que seja perpendicular a QR (vertical).

- A distância entre dois pontos com a mesma ordenada (y) é a diferença entre suas abscissas (x).



A figura, então, é esta:



Note que o X_{QR} é o mesmo x dos pontos R e Q, pois a reta suporte do lado QR é vertical. Assim, a área do triângulo é

$$S = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}$$

$$S = \frac{5000 \cdot (x_Q - 20)}{2} = 30000$$

$$\rightarrow 5000 \cdot (x_Q - 20) = 60000$$

$$\rightarrow (x_Q - 20) = \frac{60000}{5000}$$

$$\rightarrow x_Q - 20 = 12$$

$$\rightarrow x_Q = 32$$

Com essa informação em mãos, vamos calcular a população de Q (observe que temos 3 alternativas falando do número de habitantes de Q, então é um bom começo).

Se

$$d = \frac{\text{habitantes}}{A}$$

Então:

$$\text{habitantes} = d \cdot A = y \cdot x$$

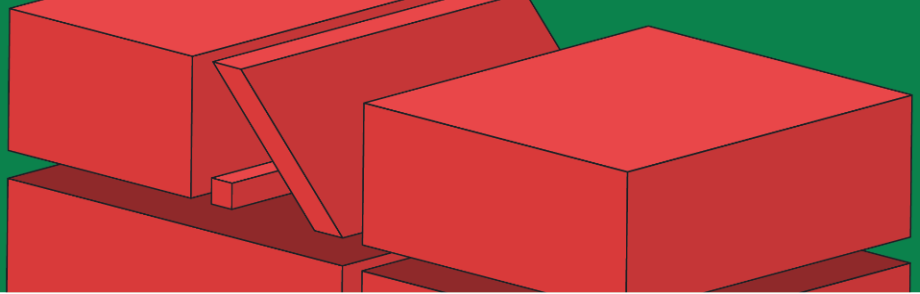
Já que y do ponto representa d e x do ponto representa A . Assim:

$$\text{habitantes}(Q) = y_Q \cdot x_Q$$

$$\rightarrow \text{habitantes}(Q) = 5000 \cdot 32 = 160000$$

Resposta: E.

OBS: Com isso, acertaríamos a questão sem precisar ter que calcular a densidade demográfica de P. Isso é ganhar tempo em prova, sempre fique atento para tentar eliminar ou marcar alternativas logo de cara antes de testar todas.



27. A média aritmética simples entre números reais não negativos, indicados por m e p , é igual a $\frac{m+p}{2}$, e a média geométrica entre esses mesmos números é igual a $\sqrt{m \cdot p}$. Rafael fez duas provas de Econometria, tendo tirado 7 pontos a mais na segunda prova do que na primeira. A média aritmética das notas das provas superou a média geométrica em 0,5 ponto. Assim, a nota de Rafael na primeira prova, em relação à sua nota na segunda prova, corresponde a

- A) 77,77%.
- B) 65,00%.
- C) 43,75%.
- D) 69,50%.
- E) 56,25%.

Resolução:

Seja n a nota da primeira prova. Dessa forma, a nota da segunda prova é $n+7$.

A questão afirma que

$$MA = MG + 0,5$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{n + (n + 7)}{2} &= \sqrt{n \cdot (n + 7)} + \frac{1}{2} \\ \rightarrow \frac{2n + 6}{2} &= n + 3 = \sqrt{n \cdot (n + 7)}\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado nos dois lados,

$$\begin{aligned}(n + 3)^2 &= n \cdot (n + 7) \\ \rightarrow n^2 + 6n + 9 &= n^2 + 7n \\ \rightarrow 9 &= n\end{aligned}$$

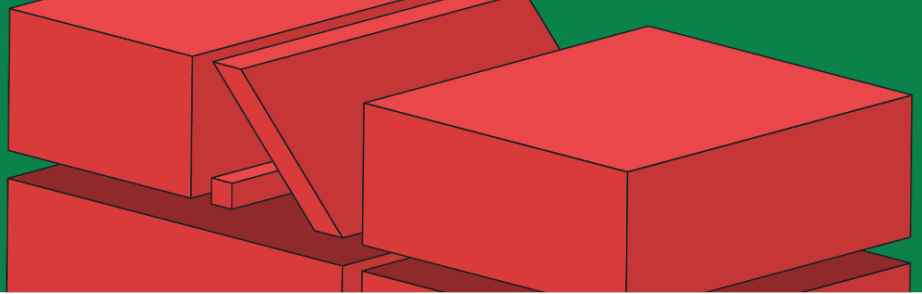
A nota da segunda prova, então é

$$n + 7 = 16$$

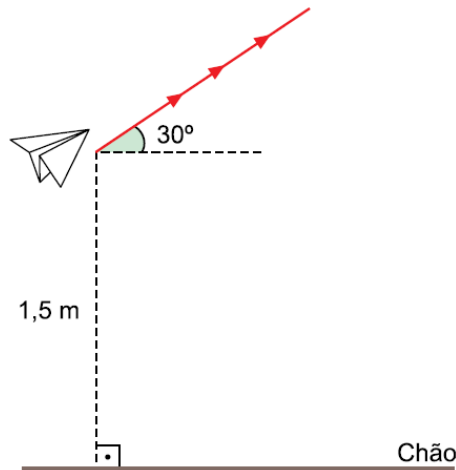
Logo, a porcentagem do valor da primeira nota em relação à segunda é:

$$\frac{9}{16} = 0,5625 = 56,25\%$$

Resposta: E.



28. Quando um avião de papel está a 1,5 metro do chão plano, ele inicia uma trajetória ascendente retilínea com ângulo constante de 30° de inclinação em relação à horizontal. Durante essa trajetória sua velocidade é constante e igual a $0,8 \text{ m/s}$, até atingir a altura de 2,9 metros em relação ao chão.



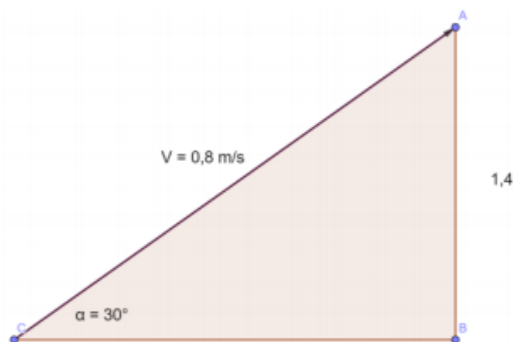
Do instante em que o avião começou sua trajetória de 30° em relação à horizontal até atingir a altura de 2,9 m em relação ao chão, o tempo decorrido foi de

- A) 2,8 s.
- B) 3,5 s.
- C) 3,1 s.
- D) 2,0 s.
- E) 3,9 s.

Resolução:

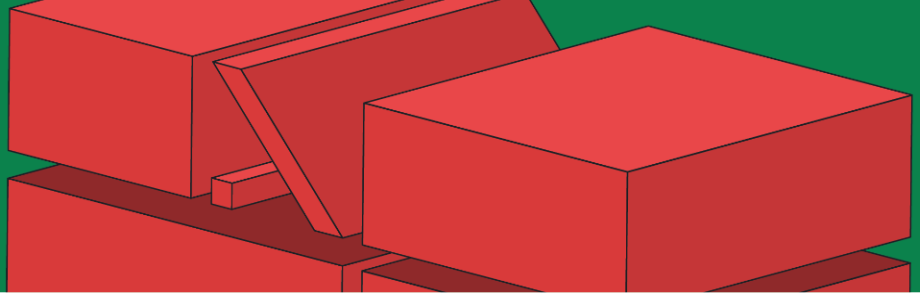
A trajetória é retilínea e a velocidade é constante, até que o avião atinja 2,9m em relação ao chão, ou seja, 1,4m em relação à altura inicial.

Podemos representar o caminho percorrido pela seguinte figura:



Sabemos que: $V = \frac{S}{t}$

Em que V é a velocidade, S é o espaço percorrido e t é o intervalo de tempo desse deslocamento.



Note que V tem direção de CA , pois essa é a trajetória do avião.

Logo, como temos a velocidade, basta descobrir S , ou seja, o espaço percorrido pelo avião que, no caso, é CA .

Por trigonometria:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{BA}{CA}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\sin 30 &= \frac{1,4}{CA} = \frac{1}{2} \\ \rightarrow CA &= 2 \cdot 1,4 = 2,8\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}V &= \frac{S}{t} = \frac{CA}{t} \\ \rightarrow 0,8 &= \frac{2,8}{t} \\ \rightarrow t &= \frac{2,8}{0,8} = \frac{28}{8} = 3,5 \text{ s}\end{aligned}$$

Resposta: B.

29. Para fabricar determinado recipiente de vidro, uma empresa retira uma pirâmide regular, de aresta lateral igual a 1 cm, de um dos vértices de um cubo de aresta 9 cm. Quando o recipiente está com plantas e na posição em pé, a secção feita no cubo fica apoiada sobre o chão, como mostra a figura.

Recipiente

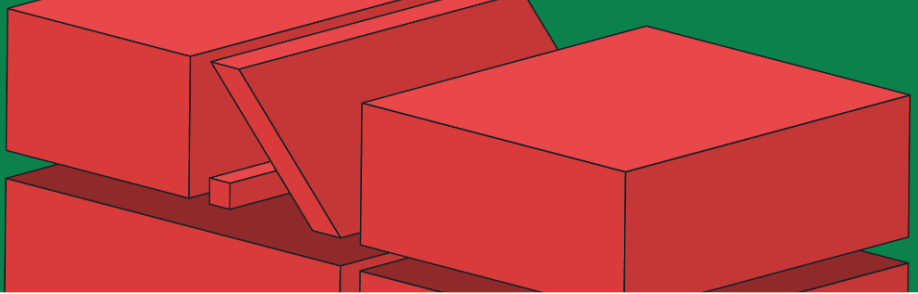


Recipiente com planta em posição em pé



(www.ebay.com.au)

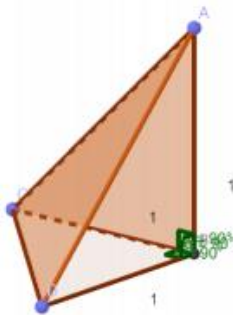
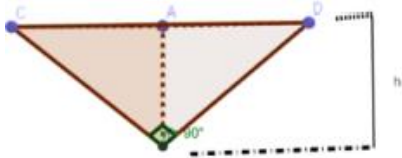
Quando o recipiente está na posição em pé, a distância de seu ponto mais alto em relação ao chão é de



- A) $9\sqrt{3} \text{ cm}$
- B) $\frac{29\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
- C) $\frac{26\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
- D) $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
- E) $8\sqrt{3} \text{ cm}$

Resolução:

A peça retirada do cubo é um tetraedro tri-retangular, representado a seguir:



O cubo está apoiado na sua diagonal. Caso não tivesse tirado esse pedaço de tetraedro, ele estaria apoiado em B.

Queremos calcular a altura relativa à base ACD na figura, representada por h.

Para tal, usaremos um truque:

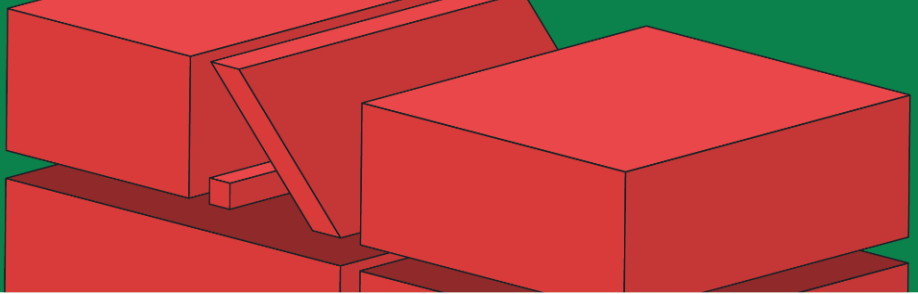
Lembrete:

A área de uma pirâmide é dada por: $\frac{1}{3} (\text{Área da base}) \cdot \text{altura}$

Mas, o truque é o seguinte: Posso escolher qualquer face da pirâmide como base e a área deve ser a mesma.

Usando, primeiramente, como base, o triângulo BCD:

$$A(BCD) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$



(É um triângulo retângulo com 2 catetos iguais a 1. Logo, sua área é o produto dos catetos dividido por 2).

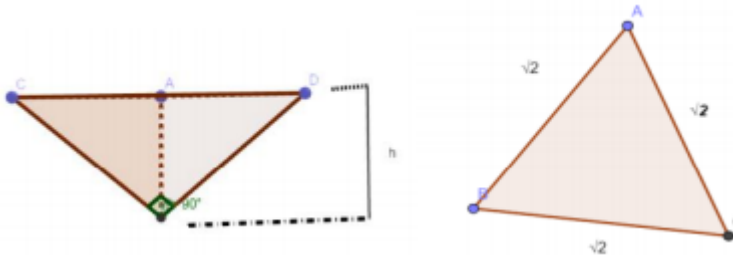
Logo, a sua altura é a distância do triângulo para o vértice oposto, ou seja, A, que já é dada e igual a 1 (medida de AB).

Então:

$$A(\text{Pirâmide}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Por outro lado, se pegarmos a base como sendo o triângulo ACD, a altura será igual a h.

O triângulo ACD é equilátero com lado igual a $\sqrt{2}$:



Para isso, basta ver que os lados AC, AD e DC são todos hipotenusas dos triângulos retângulos de catetos iguais a 1.

A área de um triângulo equilátero é dada por: $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Em que l é o lado do triângulo.

Portanto,

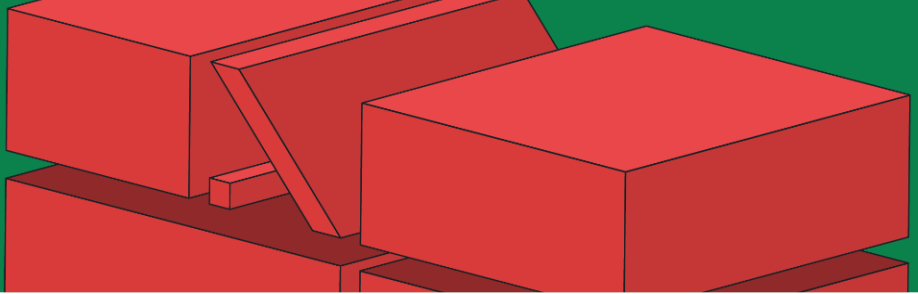
$$A(ACD) = \frac{\sqrt{2}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, pela equivalência da área:

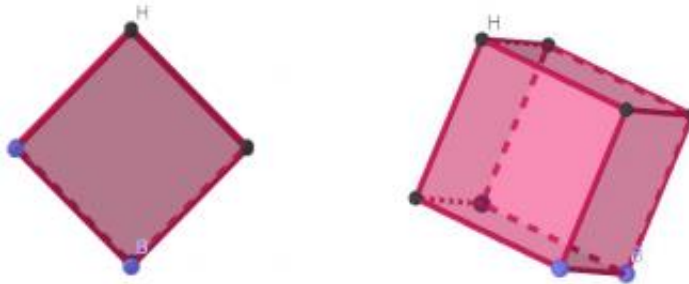
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h &= \frac{1}{6} \\ \rightarrow \sqrt{3} \cdot h &= \frac{3 \cdot 2}{6} = 1 \\ \rightarrow h &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Aqui então, é o ponto da questão:

A distância do ponto mais alto em relação ao chão seria a diagonal do cubo menos h, pois vamos pensar: caso o cubo estivesse completo, sem retirar nenhuma pirâmide, o



recipiente estaria apoiado no vértice B e, então, o ponto mais alto em relação ao chão seria o vértice oposto, cuja diagonal do cubo é a distância entre os dois:



Logo, a distância maior do recipiente com o corte seria a diagonal do cubo menos a altura desse corte (h)

Lembrete: A diagonal de um cubo de lado "a" é: $a\sqrt{3}$

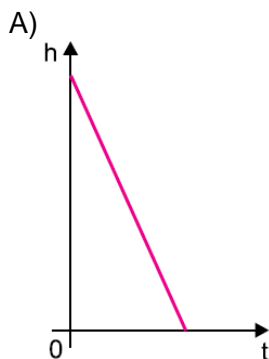
Assim, como o lado original do cubo é 9:

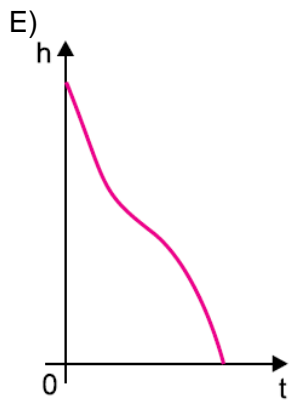
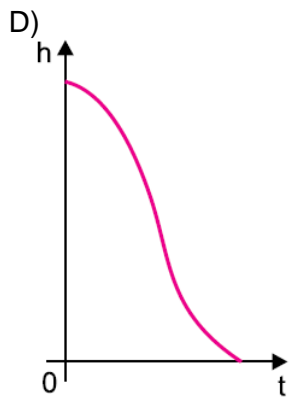
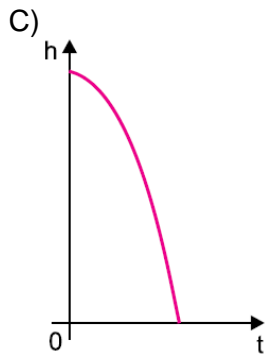
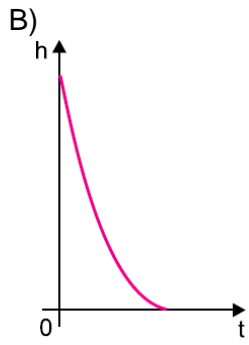
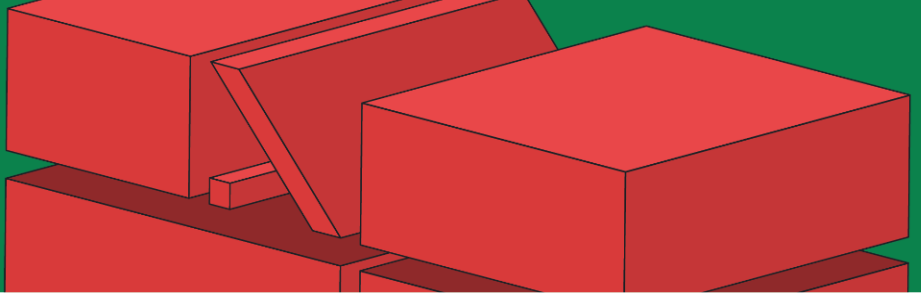
$$D_{\text{máx}} = 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{27\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}$$

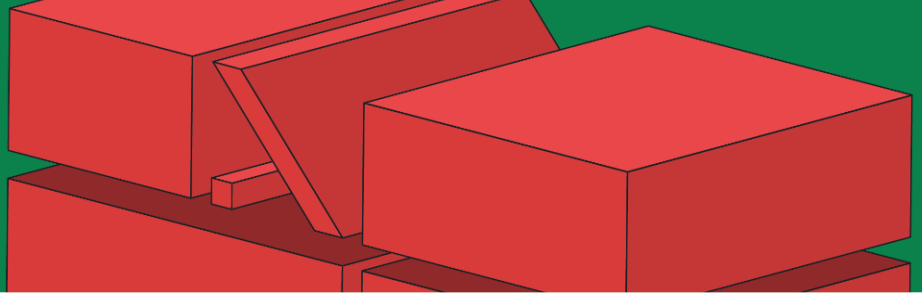
$$D_{\text{máx}} = \frac{26\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: C.

30. Uma bola de tamanho desprezível parte do repouso e desce livremente do topo de um plano inclinado até o solo. Considerando desprezível o atrito do plano e que apenas a força peso atue sobre a bola, o gráfico que melhor representa a altura h da bola em relação ao solo, em função do tempo t decorrido desde o início da descida, é







Resolução:

Essa é uma questão de Física, somente.

No movimento de queda, o objeto é acelerado com g sendo a aceleração da gravidade.

A função que descreve a altura em função do tempo é uma função quadrática tal que:

$$h = h_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

Em que h_0 é a altura inicial e t é o tempo.

Logo, como é uma função do segundo grau em t , o gráfico é uma parábola.

Resta saber se a concavidade é para cima ou para baixo.

Lembrete:

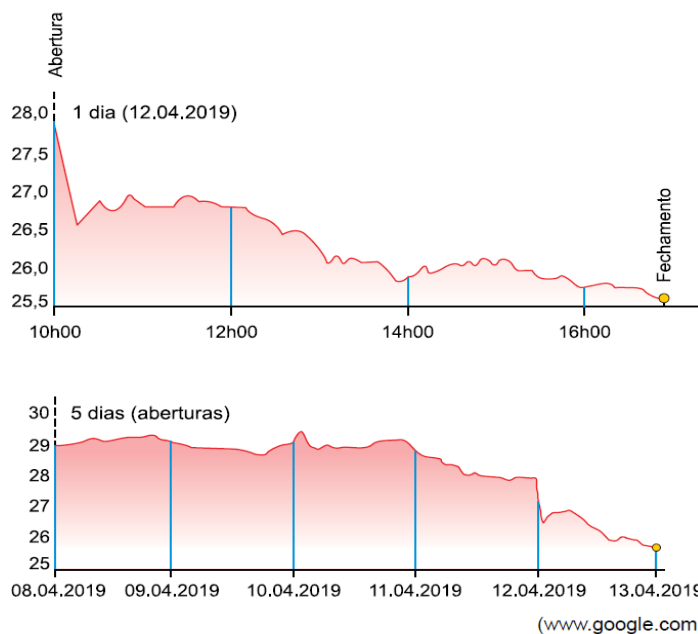
- A concavidade da parábola é para cima se o coeficiente que acompanha o termo quadrático é positivo;
- A concavidade da parábola é para baixo se o coeficiente que acompanha o termo quadrático é negativo;

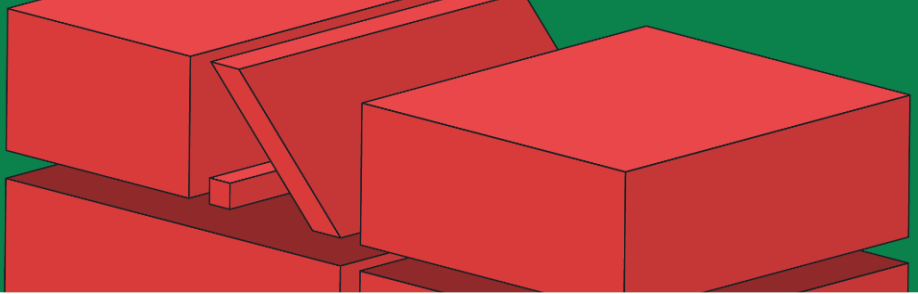
O coeficiente do termo quadrático (ou seja, t^2) é negativo.

Logo, é uma parábola de concavidade para baixo.

Resposta: C.

31. Analise os gráficos que indicam as cotações das ações de uma empresa, em reais, agrupadas em diferentes períodos de tempo.





A análise dos gráficos permite concluir que:

- A) a diferença entre a maior e a menor cotação no período da abertura de 08.04.2019 até às 12h00 de 12.04.2019 é de R\$ 4,00.
- B) da cotação da abertura de 09.04.2019 até a abertura de 13.04.2019 houve queda de, aproximadamente, 12%.
- C) houve algum instante entre as 14h00 e as 16h00 do dia 12.04.2019 em que a cotação superou R\$ 27,00.
- D) a maior cotação no período de 5 dias analisados ocorreu próxima ao fechamento do dia 11.04.2019.
- E) a menor cotação no período de 5 dias analisados ocorreu por volta das 14h00 do dia 12.04.2019.

Resolução:

- (A) Falso. Maior cotação no período: $\approx 29,5$; menor cotação: 26,5. Diferença: 3 reais.
- (B) Verdadeiro.** Pelo gráfico, a abertura do dia 09/04/2019 é de R\$ 29,00 e a abertura do dia 13/04/2019 é de R\$ 25,50, o que significa uma queda de:
$$\frac{29-25,5}{29} = \frac{3,5}{29} \cong 0,12 = 12\%$$
- (C) Falso. Nesse período, a cotação se manteve sempre menor que 27.
- (D) Falso. O pico ocorreu próximo à abertura do dia 10.
- (E) Falso. Ocorreu próximo às 16 horas desse dia

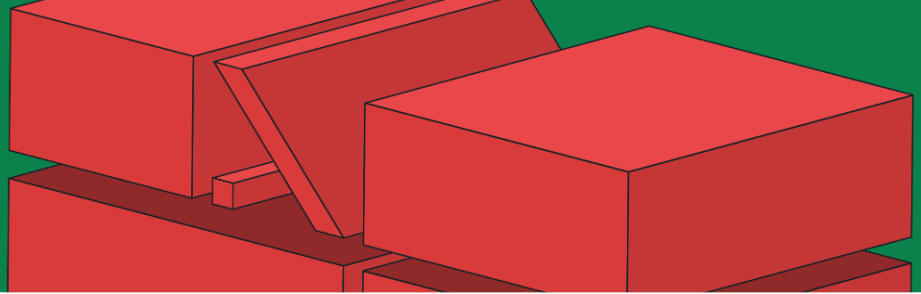
Resposta: B.

32. Atualmente, uma pessoa pode solicitar aposentadoria por idade, por tempo de contribuição ou por invalidez. De acordo com dados da Previdência Social de dezembro de 2017, a capital de São Paulo tem, aproximadamente, 13 aposentados por idade para cada 4 aposentados por invalidez, e 8 aposentados por invalidez para cada 37 aposentados por tempo de contribuição. Se os mesmos dados indicam cerca de 144 mil aposentados por invalidez na capital de São Paulo, o total de aposentados nessa mesma capital é de, aproximadamente,

- A) 1,8 milhão.
- B) 2,3 milhões.
- C) 2,9 milhões.
- D) 1,3 milhão.
- E) 2,6 milhões.

Resolução:

Primeiro, vamos descobrir a quantidade de aposentados por idade (i) usando regra de três simples:



$$13 \text{ ----- } 4$$

$$i \text{ ----- } 144.000$$

$$\frac{i}{13} = \frac{144000}{4}$$

$$\rightarrow i = \frac{13 \cdot 144000}{4} = 468000$$

$$\rightarrow i = 468000$$

Agora, usaremos o mesmo processo para descobrir o número de aposentados por tempo de contribuição (t)

$$8 \text{ ----- } 37$$

$$144000 \text{ ----- } t$$

$$\frac{t}{37} = \frac{144000}{8}$$

$$\rightarrow t = \frac{37 \cdot 144000}{8} = 666000$$

$$\rightarrow t = 666.000$$

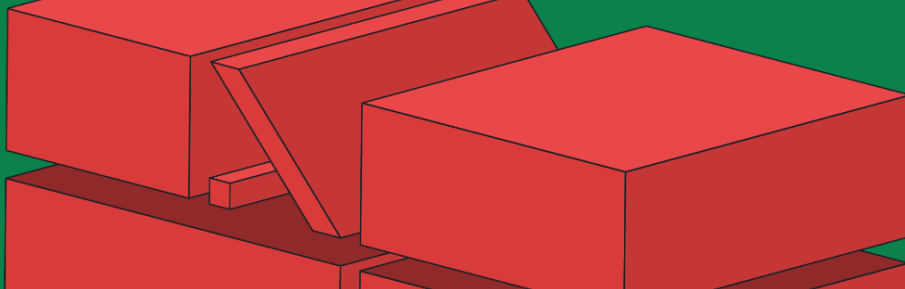
O total de aposentados é:

$$A = 144000 + i + t$$

$$\rightarrow A = 144000 + 468000 + 666000$$

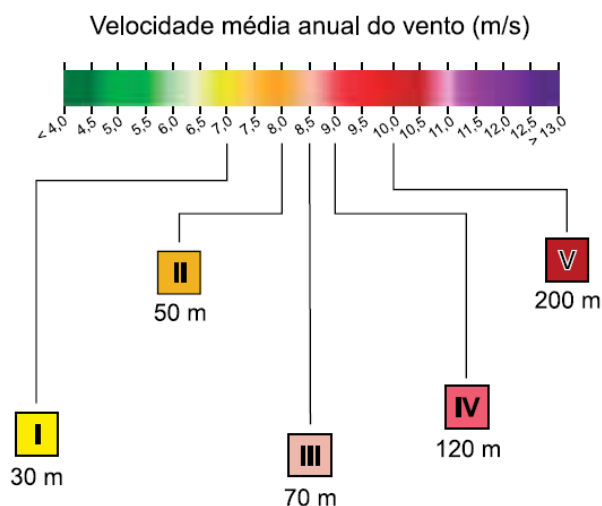
$$\rightarrow A = 1278000 \cong 1,3 \text{ milhão}$$

Resposta: D.



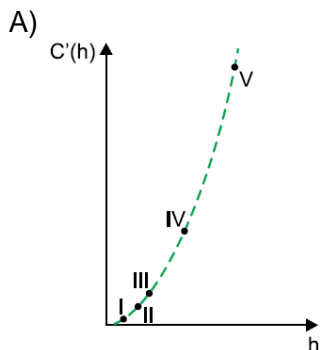
Leia o texto para responder às questões de **33** a **35**.

Para a construção de torres de energia eólica, foi realizado um estudo relacionando a velocidade do vento em função de cinco possíveis alturas para essas torres, conforme mostra o esquema.

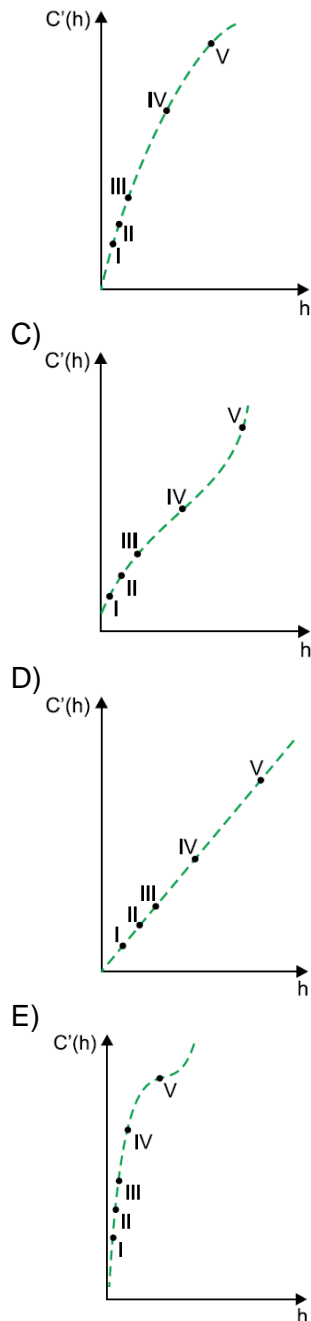
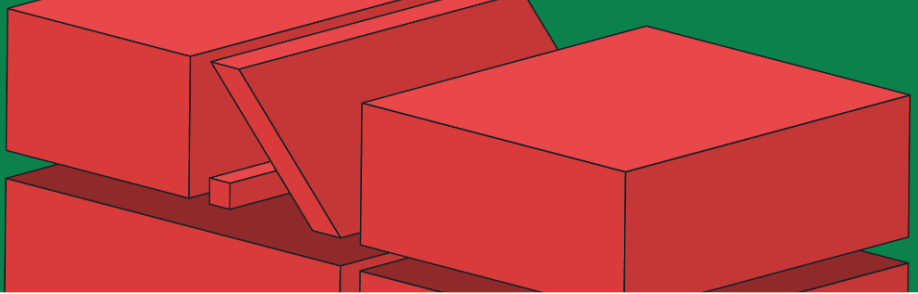


custo C de construção de uma torre de energia eólica na região estudada, em unidades monetárias, varia em função da altura h da torre, em metros, de acordo com a fórmula $C(h) = \frac{h^3 - h}{100}$. A energia E , em unidades de energia, gerada por uma torre eólica nessa região, em função da velocidade v do vento, em m/s, é dada pela fórmula $E(v) = 2 \frac{v}{10}$.

33. Seja $C'(h)$ o custo de construção de uma torre eólica, em unidades monetárias, em função da altura h , em metros. O gráfico que melhor representa $C'(h)$ para as cinco possíveis alturas das torres é



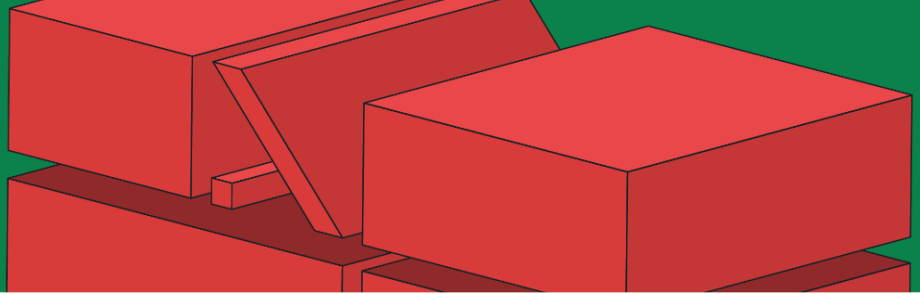
B)

**Resolução:**

Essa questão temos que resolver na base da interpretação dos dados. As ferramentas matemáticas formais que nos permitem chegar a uma análise precisa são vistas nas disciplinas de cálculo I de ensino superior

O “jeitinho” improvisado que temos é olhar a taxa de crescimento da abscissa (h) em relação à ordenada ($C'(h)$).

Substituindo os valores 30, 50, 70, 120 e 200 na fórmula dada no texto, vamos obtemos:



Dica para fazer menos conta:

Não se preocupe com os zeros, são potências de 10. Reescreva os números como $x \cdot 10^n$ que as contas serão mais claras.

$$\begin{aligned}C'(30) &= 269,7 \\C'(50) &= 1249,5 \\C'(70) &= 3429,3 \\C'(120) &= 17278,8 \\C'(200) &= 79998,0\end{aligned}$$

Agora, observe o seguinte:

$$\begin{aligned}C'(50) - C'(30) &= 979,8 \\C'(70) - C'(50) &= 2179,8\end{aligned}$$

...

Quando h vai aumentando, as diferenças entre os valores de $C(h_1)$ e $C(h_1 + x)$ vai aumentando.

Ou seja:

As ordenadas crescem a uma velocidade maior que as abscissas.

Quanto maior for h , mais $C'(h)$ será maior que h .

Então, geometricamente, se eu pegar um valor progressivamente maior de x , o aumento de y é cada vez maior. Quando pegar um valor muito grande de h , o valor de $C'(h)$ vai ser tão maior que vai tender a um valor infinitesimal.

Graficamente, isso quer dizer que, quanto maior h , mais o gráfico se aproxima de uma reta vertical, pois $C'(h)$ terá crescido tanto frente a h que qualquer variação de h será mínima.

Logo, o gráfico será uma espécie de “U” pela metade: começa curvo e vai tendendo a uma reta vertical.

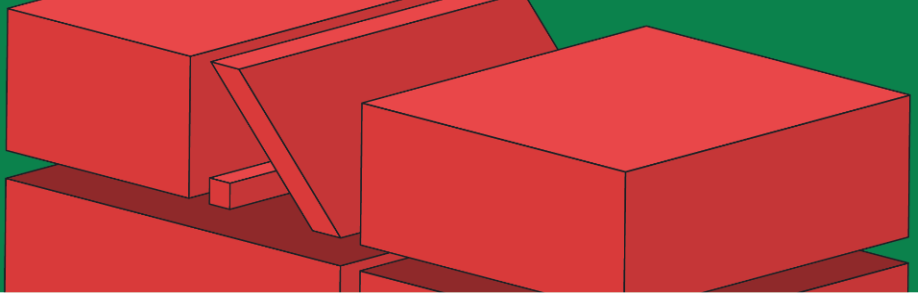
Assim, a melhor resposta é:

Resposta: A.

OBS: Por que não poderia ser o item B? Pois no item B, o gráfico tende a ficar horizontal para valores altos de h . Ele vai encurvando até ficar horizontal, praticamente em forma de “C”.

34. Na comparação das alturas I e III, o módulo da variação de $E(v)$, dividido pelo módulo da variação de h , é igual a

A) $16(2\sqrt{2} - 1)$



- B) $\frac{16(2\sqrt{2}-1)}{5}$
C) $\frac{32(2\sqrt{2}-1)}{5}$
D) $8(2\sqrt{2} - 1)$
E) $2\sqrt{2} - 1$

Resolução:

A questão não possui gabarito e deveria ser anulada, ou, pelo menos, redigida corretamente.

Note que a questão pede:

$$\frac{E(v_3) - E(v_1)}{h_3 - h_1}$$

Olhando o gráfico,

$$\begin{aligned}v_3 &= 8,5 \text{ m/s} \\v_1 &= 7 \text{ m/s} \\h_3 &= 70 \\h_1 &= 30\end{aligned}$$

A expressão fica:

$$\frac{\frac{8,5}{2^{10}} - \frac{7}{2^{10}}}{40}$$

Que seria a resposta adequada.

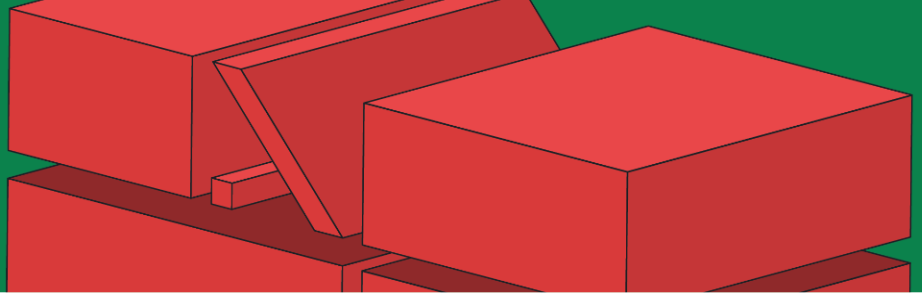
Resposta: SEM RESPOSTA

Gabarito oficial: C.

Por questão de bom senso, a questão deveria ser anulada, sob pena dos candidatos serem prejudicados.

35. Se a velocidade do vento aumenta de v para $(v + 1)$ metros por segundo, então a variação da energia gerada por uma torre, que vai de $E(v)$ para $E(v + 1)$, será igual a

- A) $(1 - \sqrt[10]{2}) \cdot E(v + 1)$
B) $(\sqrt[10]{2} - 1) \cdot E(v)$
C) $(\sqrt[10]{2} - 1) \cdot E(v + 1)$
D) $\frac{(\sqrt[10]{2}-1)}{1024} \cdot E(v)$
E) $\frac{(\sqrt[10]{2}-1)}{10} \cdot E(v)$



Resolução:

A variação de energia é, justamente,

$$\Delta E = E(v + 1) - E(v)$$

$$\rightarrow \Delta E = 2^{\frac{v+1}{10}} - 2^{\frac{v}{10}}$$

Note que:

$$2^{\frac{v+1}{10}} = 2^{(\frac{v}{10} + \frac{1}{10})} = 2^{\frac{v}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{10}}$$

Logo,

$$\rightarrow \Delta E = 2^{\frac{v}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} - 2^{\frac{v}{10}}$$

$$\rightarrow \Delta E = 2^{\frac{v}{10}} \cdot (2^{\frac{1}{10}} - 1)$$

Como

$$2^{\frac{v}{10}} = E(v)$$

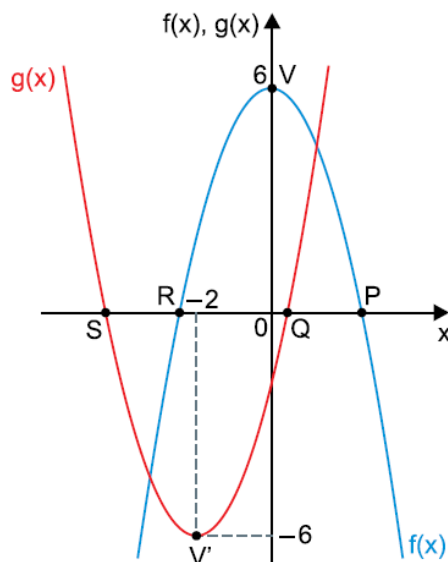
Assim:

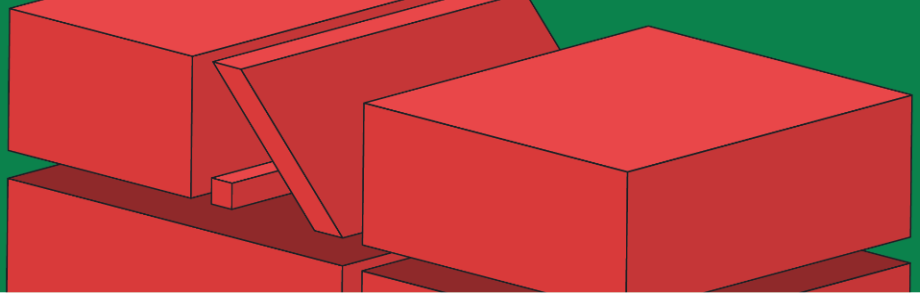
$$\Delta E = E(v) \cdot (2^{\frac{1}{10}} - 1)$$

$$\rightarrow \Delta E = E(v) \cdot (\sqrt[10]{2} - 1)$$

Resposta: B

36. A figura representa os gráficos das funções quadráticas $f(x)$ e $g(x)$, ambas definidas de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Uma das duas parábolas possui vértice $V(0, 6)$ e a outra, vértice $V'(-2, -6)$. Os pontos P, Q, R e S indicam as intersecções das parábolas com o eixo x , sendo que \overline{PR} e \overline{QS} são segmentos congruentes de medida igual a $2\sqrt{6}$ unidades dos eixos.





Nas condições dadas, $f(x) + g(x)$ é igual a

- A) $4x - 4$
- B) $10x - 2$
- C) $4x + 4$
- D) $x^2 + x - 2$
- E) $x^2 + 2x - 4$

Resolução:

Antes de sair fazendo conta para descobrir as funções, pense no problema e no gráfico.

As informações que o problema dá sempre servem para descobrir alguma coisa. Note que $PQ = RS$. Assim, o que ele quer que você note é que **g e f representam as mesmas parábolas, mas com concavidades contrárias e g está deslocado em 2 unidades para a esquerda**. Caso você translade g 2 unidades para a direita, você vai ver que g é f com a concavidade invertida.

Agora, vamos resolver nossa questão:

Lembrete:

Em uma função quadrática do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Logo, em relação a f, $X_V = 0$. Então,

$$\frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$$

E, portanto,

$$f(x) = ax^2 + c$$

Já o y_V é 6:

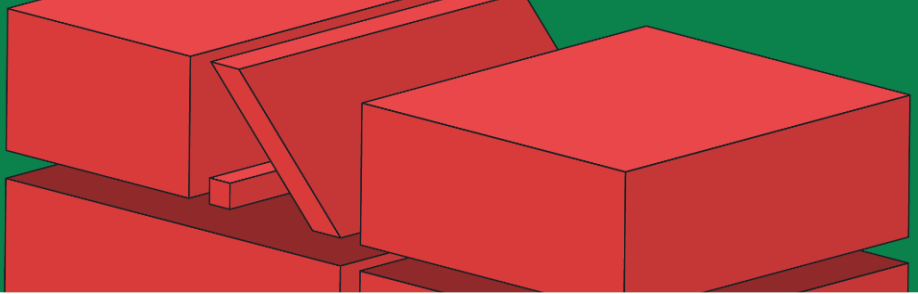
$$\frac{-\Delta}{4a} = 6$$

$$\rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 6$$

$$\rightarrow \frac{4ac}{4a} = 6$$

Como $a \neq 0$,

$$\frac{c}{1} = 6 \rightarrow c = 6$$



Lembrete: A abscissa do ponto de vértice da parábola é o ponto médio do segmento que liga as duas raízes (a distância para cada raiz é igual), quando $\Delta \neq 0$.

Como PR mede $2\sqrt{6}$ e o vértice da parábola está em $x = 0$, as raízes serão $\pm\sqrt{6}$, já que $x_p = \sqrt{6} = -x_r$.

Logo, vamos substituir na equação de $f(x)$:

$$f(\sqrt{6}) = a(\sqrt{6})^2 + 6$$

Como esse valor de x é raiz,

$$0 = 6a + 6$$

$$a = -1$$

A função $f(x)$ está determinada:

$$f(x) = -x^2 + 6$$

Observe que:

$$x_g = x_f - 2 \rightarrow x_g + 2 = x_f$$

Como g e f possuem sentidos de concavidades contrárias, para um x genérico pertencente à função g :

$$g(x) = -f(x + 2)$$

Ficou complicado?

Interprete essa equação: Para um ponto x na função g , o seu valor de $g(x)$ é igual ao valor de f de um ponto localizado 2 unidades para frente, mas multiplicado por -1 , pois f está com concavidade contrária.

Assim,

$$g(x) = -f(x + 2) = -(-1(x + 2)^2 + 6)$$

$$g(x) = -(-1(x^2 + 4x + 4) + 6)$$

$$g(x) = (x^2 + 4x + 4) - 6$$

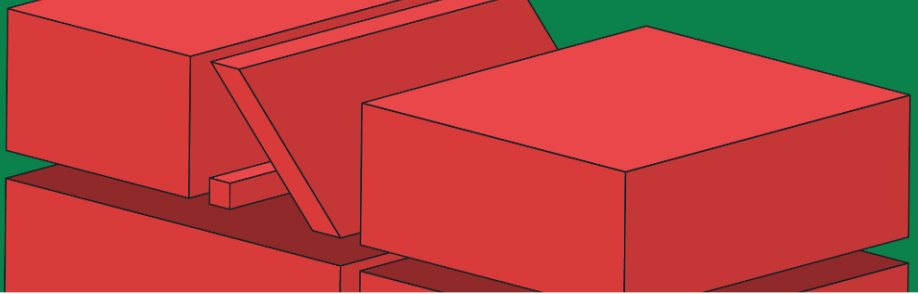
$$g(x) = x^2 + 4x - 2$$

Logo,

$$g(x) + f(x) = x^2 + 4x - 2 - x^2 + 6$$

$$g(x) + f(x) = 4x + 4$$

Resposta: C



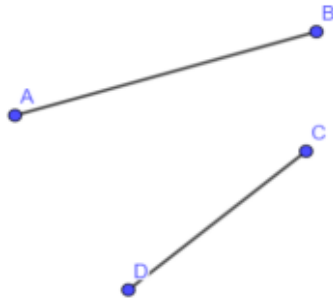
Observe que a sacada da translação é sensacional e pode ser usada em outras questões. Mas, caso você não tivesse essa ideia na hora, existe sempre o método braçal de usar as informações do gráfico para descobrir $g(x)$ substituindo pontos no gráfico.

37. Em um cesto foram colocadas, de forma aleatória, duas cordas. Em seguida, duas das quatro extremidades dessas cordas são pegas aleatoriamente e amarradas. Na sequência, as outras duas extremidades que restam são pegas e amarradas. A probabilidade de que tal processo resulte em uma única curva fechada com as duas cordas é igual a

- A) $\frac{1}{4}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{1}{3}$
- E) $\frac{2}{3}$

Resolução:

Sejam as cordas AB e CD representadas a seguir:



Ao pegar uma extremidade, por exemplo "A", sobra 3 para escolher (B, C e D):

- Ao escolher C ou D, juntamos 2 cordas diferentes e, ao juntar as extremidades restantes, formaremos um círculo, ou seja, uma única curva fechada. **Assim, temos 2 possibilidades.**

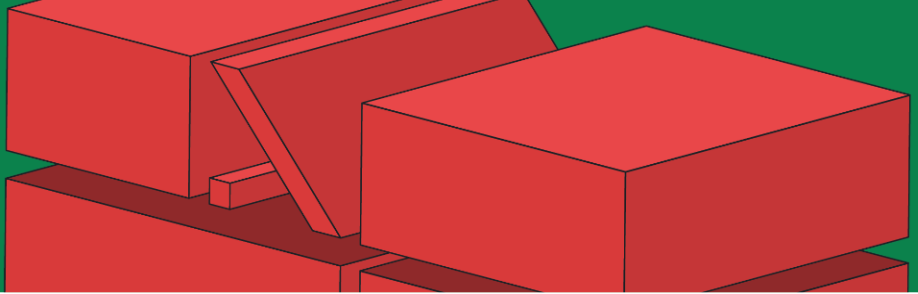
- Ao escolher B, formamos um círculo com a corda AB, sobrando ainda a corda CD, que formará outro círculo após a junção das extremidades. Assim, teremos 2 curvas fechadas.

Então, temos 2 casos favoráveis à situação da questão em um total de 3 casos possíveis.

Logo,

$$P = \frac{2}{3}$$

Resposta: E



38. Um nanômetro (1 nm) corresponde a 10^{-9} metros. Certo número x de quadrados idênticos de área igual a 64 nm^2 foram justapostos e alinhados até perfazerem a extensão de 1 cm, como representado na figura.



O valor de x , em notação científica, é igual a

- A) $1,25 \cdot 10^6$
- B) $1,5625 \cdot 10^5$
- C) $8 \cdot 10^{-7}$
- D) $8 \cdot 10^{-11}$
- E) $1,25 \cdot 10^{-8}$

Resolução:

Lembrete:

Seja S a área de um quadrado de lado L .

Então:

$$S = L^2$$

Logo, o lado de cada quadradinho é dado por:

$$64 = L^2$$

$$\rightarrow 8 \text{ nm} = L$$

A extensão dos quadradinhos possui comprimento dado por:

$$C = x \cdot L$$

Pois cada quadrado contribui com um comprimento L na justaposição de x quadrados.

Assim, como $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ e $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$,

$$1 \text{ cm} = 10^7 \text{ nm}.$$

Assim, como $C = 1 \text{ cm}$,

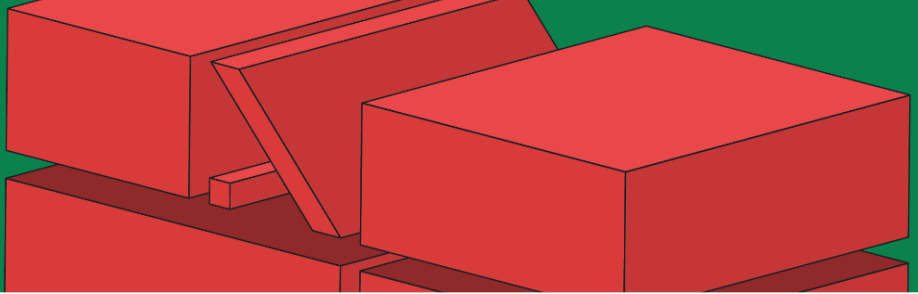
$$1 \cdot 10^7 = x \cdot 8 \rightarrow x = 0,125 \cdot 10^7$$

Lembre-se:

A notação científica é da forma

$$N \cdot 10^k$$

em que K é um inteiro e $0 \leq N < 10$, com N racional

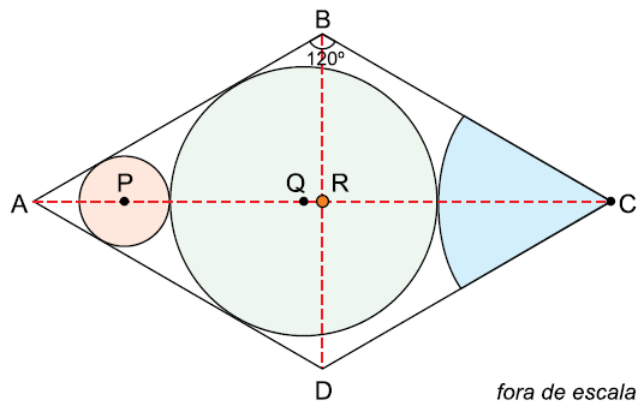


Assim,

$$x = 1,25 \cdot 10^6$$

Resposta: A

39. O projeto de logomarca de uma empresa é formado por um losango ABCD de lado medindo 12 cm e ângulo interno \widehat{ABC} de medida igual a 120° . Dentro do losango são colocados dois círculos, de centros P e Q, e um setor circular de centro C. O setor circular deve tangenciar o círculo de centro Q que, por sua vez, deve tangenciar o círculo de centro P. Os círculos tangenciam dois lados do losango e R representa o ponto de intersecção das diagonais do losango, como mostra a figura.

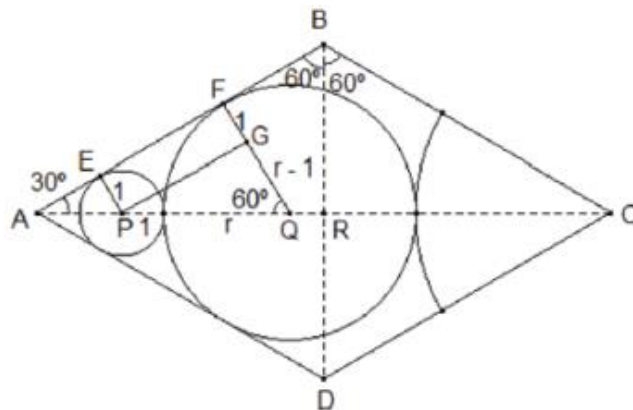


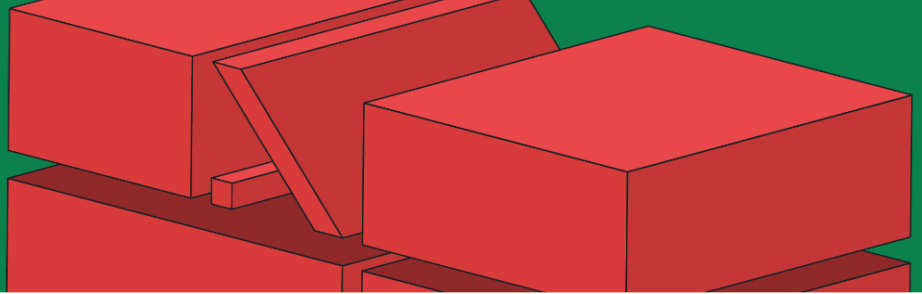
Se o projeto prevê que o raio do círculo de centro P deve medir 1 cm, então o raio do setor circular de centro C terá medida, em centímetros, igual a

- A) $12\sqrt{3} - 9$
- B) $12\sqrt{3} - 10$
- C) $10\sqrt{3} - 8$
- D) $9\sqrt{3} - 8$
- E) $4\sqrt{3} - 3$

Resolução:

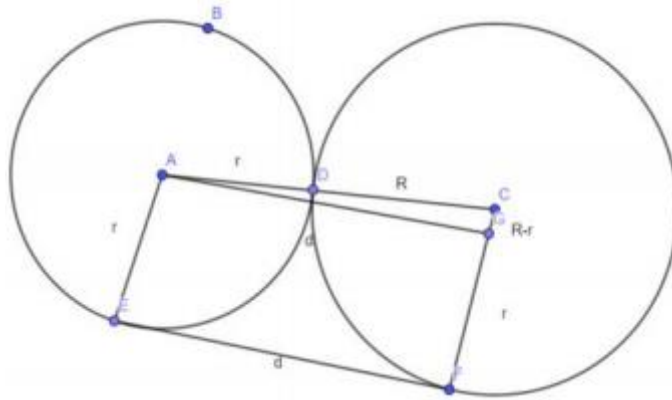
Observe a figura:





Lembrete: As diagonais de um losango são perpendiculares, se encontram nos seus respectivos pontos médios e dividem os ângulos internos pela metade (são bissetrizes dos ângulos internos).

Lembrete: Sejam 2 circunferências de raios r e R , e o segmento EF a tangente passando pelos dois círculos. A distância de EF é dada por:



O triângulo ACG é retângulo e:

$$(R - r)^2 + d^2 = (R + r)^2$$

$$R^2 + r^2 - 2rR + d^2 = R^2 + r^2 + 2rR$$

$$-2rR + d^2 = 2rR$$

$$d^2 = 4rR$$

$$\rightarrow d = 2\sqrt{Rr}$$

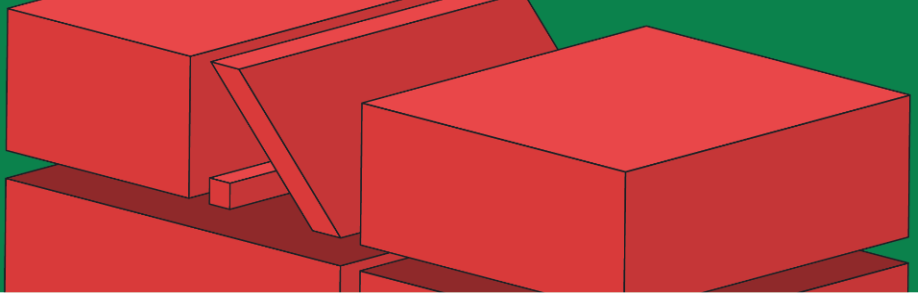
Assim, note que $EF=2\sqrt{r}$

O ângulo PQG é 60° , vide a figura. Um jeito de ver isso é notar o ângulo EAP , que é 30° . A partir dele, completando os ângulos, chegamos ao valor de PGQ .

Como o triângulo PGQ é retângulo em G ,

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PG}{PQ} = \frac{EF}{PQ} = \frac{2\sqrt{r}}{PQ}$$

$$PQ = \frac{4\sqrt{r}}{\sqrt{3}}$$



Mas $PQ = 1+r$, logo,

$$\frac{4\sqrt{r}}{\sqrt{3}} = 1 + r$$

$$\frac{16}{3}r = 1 + 2r + r^2 = 1 + \frac{6}{3}r + r^2$$

$$1 - \frac{10}{3}r + r^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{100}{9} - 4 = \frac{100 - 36}{9} = \frac{64}{9}$$

E as raízes serão:

$$\frac{\frac{10}{3} \pm \frac{8}{3}}{2} = 3 \text{ ou } \frac{1}{3}$$

Note que como $r > 1$ (a circunferência é maior que a outra), r deve ser 3.

Além disso, no triângulo AEP,

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{EP}{AP} = \frac{1}{AP}$$

$$2 = AP$$

No triângulo ABR, AR é metade da diagonal AC e é calculada por:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AR}{AB} = \frac{AR}{12}$$

(AB é o lado do losango)

Assim,

$$AR = 6\sqrt{3} \text{ e } AC = 12\sqrt{3}$$

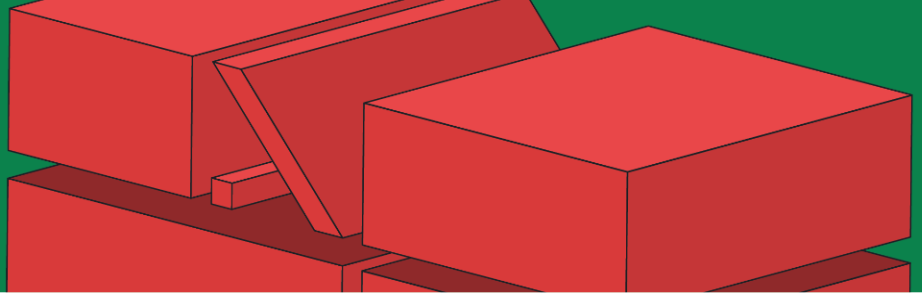
O valor do Raio em C é dado por $AC - 2r - 1 - AP$ (veja a figura).

Logo,

$$R_c = 12\sqrt{3} - 6 - 1 - 2 = 12\sqrt{3} - 9$$

Resposta: A

40. Os termos de uma sequência numérica são determinados pela fórmula $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ nessa sequência, o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2019}$ é igual a



- A) $\frac{1}{2019! \cdot 2020}$
- B) $\frac{1}{2019!}$
- C) $\frac{1}{(2019!)^2 \cdot 2020}$
- D) $\frac{2020}{(2019!)^2}$
- E) $\frac{1}{(2019!)^2}$

Resolução:

Temos, ao desenvolver a fórmula do n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{n+1-n}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

o produto é dado por:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2019} &= \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2018 \cdot 2019} \cdot \frac{1}{2019 \cdot 2020} \end{aligned}$$

Atenção!

A grande sacada da questão é perceber o seguinte:

A partir do 2, cada número aparece 2 vezes (à direita da primeira aparição de cada número, aparece sempre ele mesmo). Logo, esses números estarão elevados ao quadrado. Mas até qual? Até 2019, pois 2020 não conta (aparece somente uma vez). Como $1^2 = 1$, a expressão fica:

$$\frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018 \cdot 2019)^2 \cdot 2020}$$

Mas,

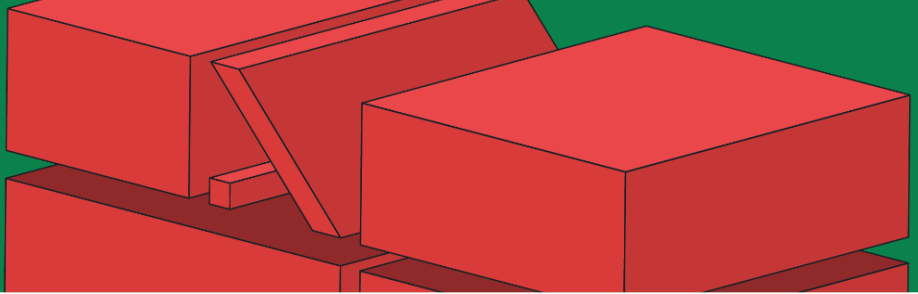
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018 \cdot 2019 = 2019!$$

Logo, a resposta será:

$$\frac{1}{(2019!)^2 \cdot 2020}$$

Resposta: C.

41. Patrícia e Simone estão brincando com um jogo. Em cada rodada desse jogo, Patrícia joga uma moeda honesta e Simone joga um dado convencional honesto de seis faces, ambas ao mesmo tempo. Se sair cara na moeda e o número 5 ou o número 6 no dado, considera-se que houve empate e as duas iniciam uma nova rodada. Também considera-se empate, com início de nova rodada, caso saia coroa na



moeda e 1, 2, 3 ou 4 no dado. Caso saia cara e não saia nem 5 e nem 6 no dado, o jogo se encerra com a vitória de Patrícia. Caso saia 5 ou 6 no dado e não saia cara na moeda, o jogo se encerra com a vitória de Simone.

A probabilidade de que Simone ganhe esse jogo na quinta rodada é igual a

- A) $\frac{1}{96}$
- B) $\frac{1}{48}$
- C) $\frac{1}{64}$
- D) $\frac{1}{192}$
- E) $\frac{1}{208}$

Resolução:

Adotaremos a notação K = cara e C = coroa. Primeiramente, vamos organizar as ideias

Existem 12 possibilidades de resultados em cada rodada (podemos ter cara + um valor de 1 a 6 no dado ou coroa + valor de 1 a 6 no dado, totalizando 12).

Desses casos, temos:

1) Empate, se:

- Tivermos K + 5 ou K + 6 (2 chances);
- C + 1,2,3 ou 4 (4 possibilidades).

A probabilidade de empates é:

$$P_e = \frac{2 + 4}{12} = \frac{1}{2}$$

2) Vitória de Patrícia, se:

- Tivermos K + 1, 2, 3, 4 (4 possibilidades).

$$P_p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

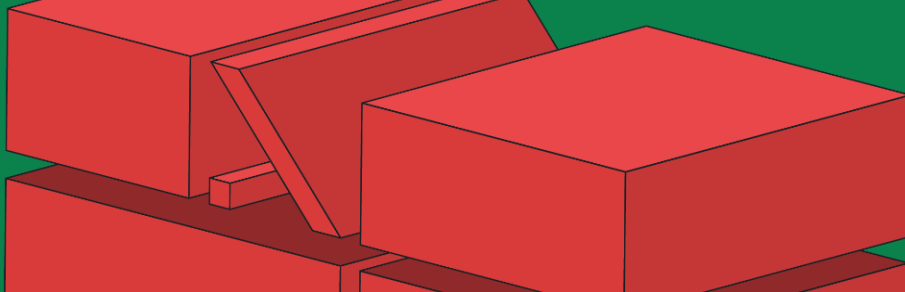
3) Vitória de Simone:

É o restante dos casos, ou seja,

$$P_s = 1 - (P_p + P_e) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$P_s = 1 - \frac{3+2}{6} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Por último, devemos atender ao requisito da questão: que Simone vença o jogo na quinta rodada.



Observe que para isso acontecer, nem Simone nem Patrícia deverão ganhar nas quatro primeiras rodadas, caso contrário o jogo acabaria. Assim devemos ter 4 empates seguidos e, então, vitória de Simone.

Assim, nossa probabilidade total é:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{96}$$

Resposta: A

42. Em um conjunto de oito elementos $\{x, 15, 34, 23, 89, 57, 36, 20\}$, em que x é um número real, a mediana é igual a 35. Sobre esse conjunto pode-se afirmar que

- A) ou a moda da sequência é 36, ou x é menor do que 23.
- B) $23 < x \leq 36$.
- C) ou a moda da sequência é 36, ou x é maior do que 36.
- D) $x \leq 34$.
- E) ou x é igual a 36, ou $x < 23$.

Resolução:

Lembre-se:

Moda: Valor que mais se repete em uma série de números;

Mediana: É o valor do meio quando organizamos a série de números em ordem crescente ou decrescente. Caso a quantidade de números seja par, a mediana é dada pela média aritmética entre os dois valores do meio.

Sabemos que o valor da mediana é 35. Assim, como temos 8 números, isso significa que o 4º e o 5º número da sequência em ordem crescente devem somar 70 (ao dividir por 2, dá 35). Assim, nossos candidatos a essas vagas são 34 e 36, cuja média dá exatamente 35.

Deixando x de lado, os números que sobraram são organizados da seguinte forma:

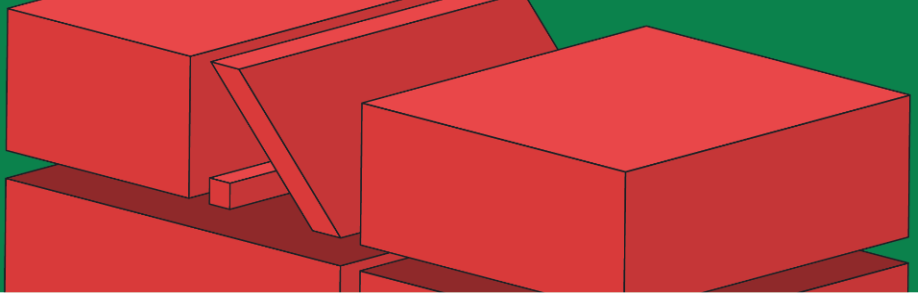
15, 20, 23, 34, 36, 57, 89

Agora, vamos pensar um pouco. Caso x esteja à esquerda de 34, o 34 será o 5º número e o 4º obrigatoriamente será menor que 36, ou seja, a mediana não dará 35. Assim, x deve ser maior (ou igual) a 36.

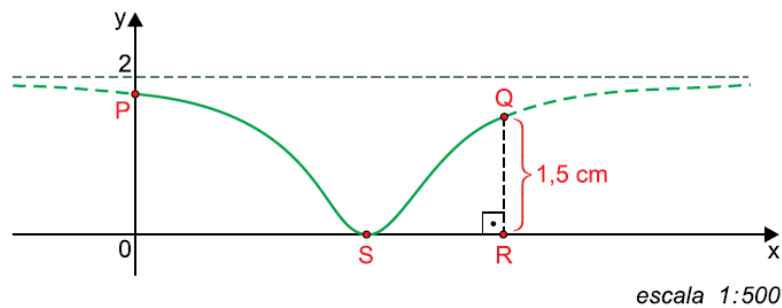
E note que, se x for igual a 36, 36 aparecerá 2 vezes - e será a moda da sequência. Caso contrário, x é maior que 36. (obviamente). Assim,

Resposta: C

Considere as informações a seguir para responder às questões **43** e **44**.



A figura mostra o desenho do projeto de um trecho de montanha-russa, feito na escala 1:500. O trecho desenhado, que vai do ponto P até o ponto Q, atinge altura mínima no ponto S e foi modelado pela função $y = \frac{2(x-3)^2}{1+(x-3)^2}$ com a unidade dos eixos cartesianos em centímetros.



43. Se o trecho que liga P com S fosse um plano inclinado retilíneo, seu comprimento real seria igual a

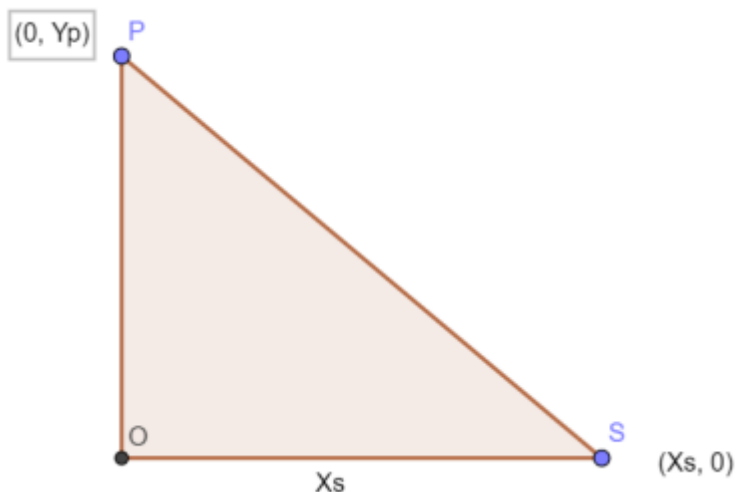
- A) $3\sqrt{38} \text{ m}$
- B) 24 m
- C) $30\sqrt{34} \text{ m}$
- D) $3\sqrt{34} \text{ m}$
- E) $30\sqrt{38} \text{ m}$

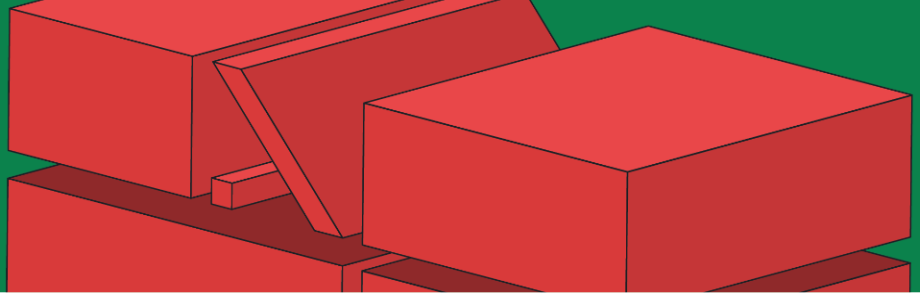
Resolução:

O que muda com a escala: NADA!

Temos que calcular normalmente o valor no sistema cartesiano e somente depois multiplicar pela escala (já que uma unidade no desenho equivale a 500 unidades reais).

Se PS fosse retilíneo, teríamos um triângulo retângulo normal:





Note que os pontos S e P pertencem, originalmente, à curva da função da questão. Assim,

- Ponto S:

$$0 = \frac{2(x_s - 3)^2}{1 + (x_s - 3)^2}$$

$$\rightarrow 2(x_s - 3)^2 = 0 \rightarrow (x_s - 3)^2 = 0$$

$$\rightarrow x_s - 3 = 0 \rightarrow x_s = 3$$

Para sabermos o tamanho do segmento PS, podemos usar a distância entre dois pontos, dada por:

$$d_{ab} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

O ponto P possui abscissa nula. Assim, substituindo na equação,

$$y_p = \frac{2(0 - 3)^2}{1 + (0 - 3)^2} = \frac{2 \cdot 9}{1 + 9} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Portanto,

$$d_{PS} = \sqrt{(3 - 0)^2 + \left(0 - \frac{9}{5}\right)^2}$$

$$d_{PS} = \sqrt{9 + \frac{81}{25}}$$

$$d_{PS} = \sqrt{\frac{81 + 9 \cdot 25}{25}}$$

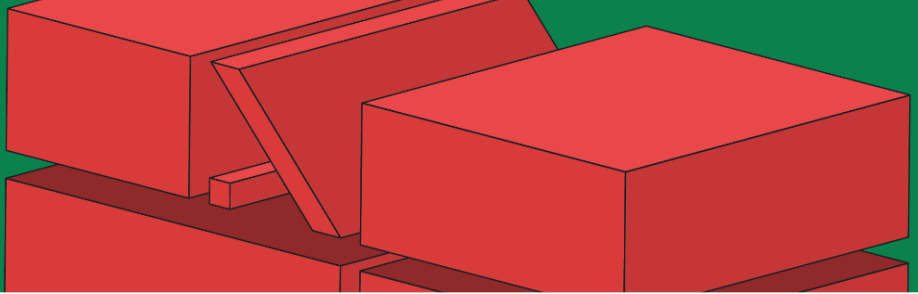
$$d_{PS} = \sqrt{\frac{81 + 225}{25}}$$

$$d_{PS} = \sqrt{\frac{306}{25}}$$

Como $306 = 9 \cdot 34$,

$$d_{PS} = \frac{3\sqrt{34}}{5}$$

A distância real seria d_{PS} multiplicado por 500, ou seja,



$$d = \frac{500.3\sqrt{34}}{5} = 300\sqrt{34}\text{cm}$$

Em metros, temos que dividir por 100:

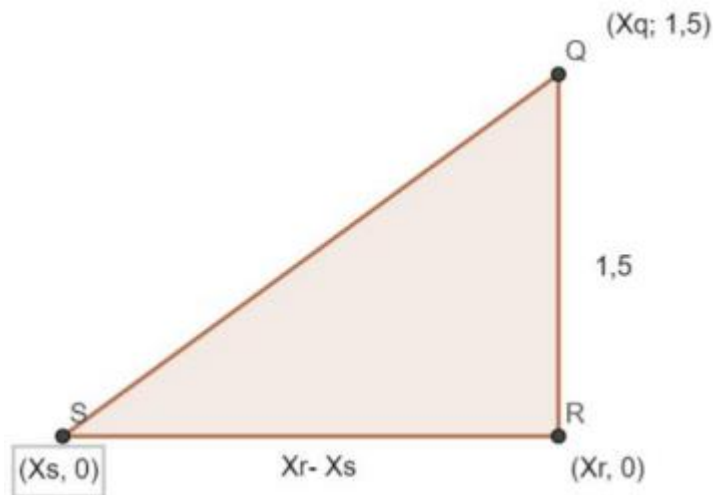
$$3\sqrt{34}\text{m} = d$$

Resposta: D.

44. No desenho do projeto, a distância entre os pontos S e R é igual a

- A) $\sqrt{6}\text{ cm}$
- B) $2\sqrt{6}\text{ cm}$
- C) $\sqrt{2}\text{ cm}$
- D) $\sqrt{3}\text{ cm}$
- E) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

Resolução:



Como QR é vertical, $X_r = X_q$.

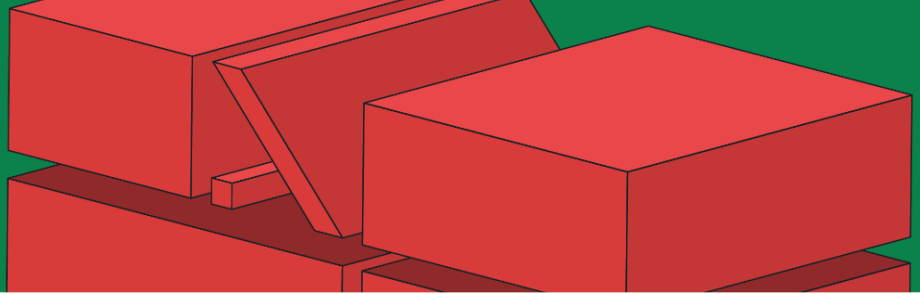
Note que os pontos S e Q pertencem, originalmente, à curva da função da questão. Assim,

- Ponto S:

$$0 = \frac{2(x_s - 3)^2}{1 + (x_s - 3)^2}$$

$$\rightarrow 2(x_s - 3)^2 = 0 \rightarrow (x_s - 3)^2 = 0$$

$$\rightarrow x_s - 3 = 0 \rightarrow x_s = 3$$



- Ponto Q:

$$1,5 = \frac{2(x_q - 3)^2}{1 + (x_q - 3)^2}$$

$$\rightarrow 2(x_q - 3)^2 = 1,5 + 1,5 \cdot (x_q - 3)^2$$

$$\rightarrow 0,5 \cdot (x_q - 3)^2 = 1,5$$

Multiplicando os dois lados por 2, temos:

$$\rightarrow (x_q - 3)^2 = 3 \rightarrow x_q - 3 = \pm\sqrt{3}$$

$$\rightarrow x_q = 3 \pm \sqrt{3}$$

Como $X_q > X_s > x_s$, temos que:

$$x_q = 3 + \sqrt{3} = x_r$$

Assim, a distância entre RS é dada por:

$$3 + \sqrt{3} - 3 = d = \sqrt{3}$$

Resposta: D.

Leia o texto para responder às questões **45** e **46**.

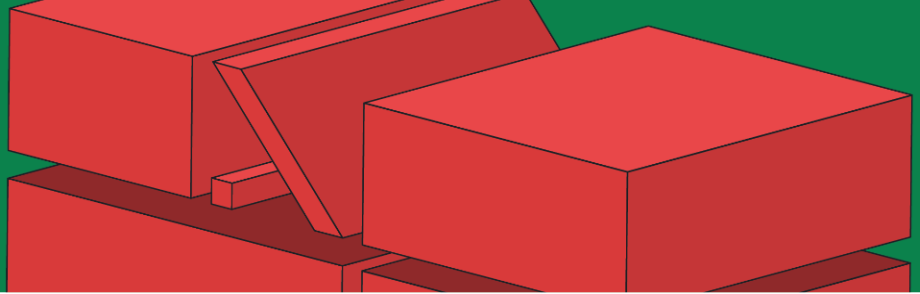
Um advogado oferece duas possibilidades de contrato de remuneração dos seus serviços para seus clientes:

I. 15% do valor da causa, caso a decisão da justiça seja em favor do cliente, ou R\$ 10.000,00 se a decisão for contrária ao cliente. Em ambos os casos, o pagamento deve ser feito na data do julgamento.

II. Honorários mensais de R\$ 1.900,00, reajustados à taxa de 2% ao mês, até a data do julgamento.

45. Considere que um cliente tenha escolhido a opção II e que a causa tenha durado 6 meses. Nessas condições o cliente terá pago ao advogado um total de

- A) R\$ 11.840,00.
- B) R\$ 12.280,00.
- C) R\$ 11.970,00.
- D) R\$ 12.120,00.
- E) R\$ 11.250,00.



Resolução:

No contrato II, temos juros simples, com taxa de 2% (0,02) ao mês.

Assim, o pagamento em cada mês é dado por:

$$P = 1900 (1 + (n - 1) \cdot 0,02)$$

Com n sendo o número de meses. Veja que é $n-1$ o fator que multiplica, já que não se paga juros no primeiro mês!

Logo,

primeiro mês: 1900

segundo mês: $1900(1 + 0,02) = 1938$

terceiro mês: $1900(1 + 0,02 \cdot 2) = 1976$

quarto mês: $1900(1 + 0,02 \cdot 3) = 2014$

quinto mês: $1900((1 + 0,02 \cdot 4) = 2052$

sexto mês: $1900 (1 + 0,02 \cdot 5) = 2090$

Total:

$$1900 + 1938 + 1976 + 2014 + 2052 + 2090 = \text{R\$ } 11.970,00$$

Resposta: C

46. A expectativa de um cliente desse advogado é ganhar uma causa, no valor de R\$ 80.000,00, no prazo de 6 meses, o que implicaria no pagamento total de t reais ao advogado, segundo a opção II de contrato de remuneração. Considere que o cliente tenha disponível os t reais para aplicar a taxa de juros compostos de 1% ao mês até a data do pagamento do advogado. Nesse cenário, com o montante da aplicação, a opção I de remuneração se mostra mais econômica para o cliente do que a opção II. Adotando nos cálculos finais $1,02^6 = 1,126$ e $1,01^6 = 1,062$, a diferença, em reais, a favor do cliente se ele escolher a opção I, no lugar da opção II, será igual a

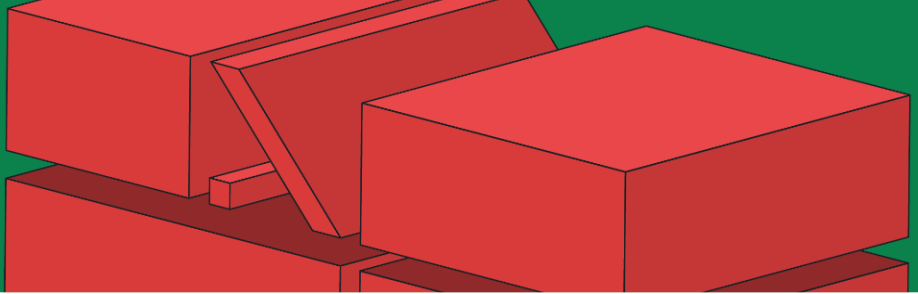
A) $0,062t - 12000$

B) $1,062t - 12000$

C) $\frac{t-12000}{0,062}$

D) $1,126t - 12000$

E) $\frac{t-12000}{1,062}$



Resolução:

Lembrete: Com os juros compostos, o montante após n meses com taxa de juros compostos t e investimento inicial M_0 é:

$$M = M_0(1 + i)^n$$

Logo, tendo t para ser investido a uma taxa de 1% (0,01) durante 6 meses, o montante final seria:

$$M = t(1 + 0,01)^6 = t \cdot (1,01)^6 = 1,062 \cdot t$$

(usando os dados do texto).

Já na opção 1, ao vencer a causa, o cliente teria que pagar 15% do valor da causa, ou seja, 15% de 80.000, que é:

$$0,15 \cdot 80000 = 12.000$$

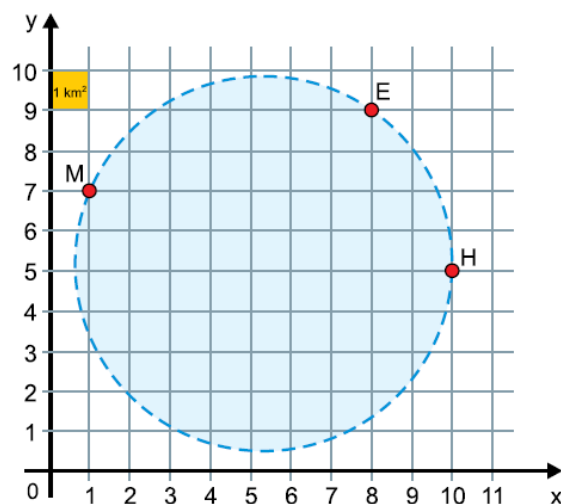
A diferença seria dada, então, pelo montante final menos os 12000 da opção 1, ou seja:

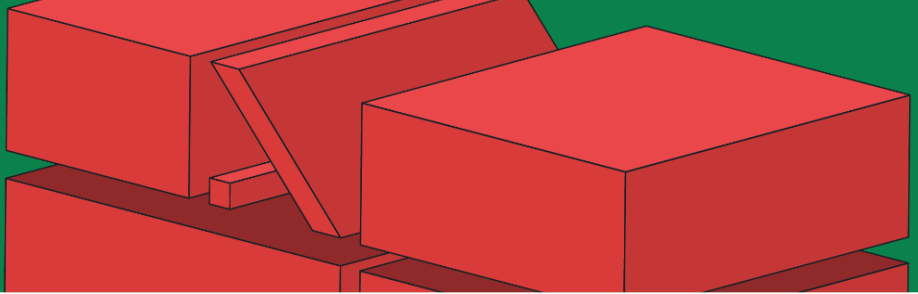
$$1,062 \cdot t - 12000$$

Resposta: B

Leia o texto para responder às questões **47** e **48**.

Na figura, M, E e H indicam, respectivamente, o mercado municipal, a escola pública e o hospital geral de uma cidade. As linhas da malha quadriculada indicam as únicas ruas da cidade, sendo todas de mão dupla. Há na cidade um projeto de construção de um rodoanel conectando M, E e H por uma autopista em forma de circunferência, como mostra a linha tracejada.





47. Com a atual configuração de ruas da cidade, de quantas formas diferentes é possível ir, pelo menor caminho possível, do mercado para o hospital, passando antes pela escola?

- A) 224.
- B) 168.
- C) 432.
- D) 540.
- E) 620.

Resolução:

Como sabemos o menor caminho?

Atenção nesse caso! Como estamos em uma malha quadriculada, podemos ir ao Norte (N), ao Sul (S), ao Leste (L) e ao Oeste (O), seguindo as arestas dos quadradinhos. Para que tenhamos o menor caminho possível, temos que pensar o seguinte: Eu tenho que seguir somente ao Norte ou ao Sul no sentido vertical e somente ao Leste ou ao Oeste no sentido horizontal. Mas por que isso?

Imagine que você pegue um caminho ao sul para uma cidade que está acima de você (ao norte). Uma hora você terá que voltar para o norte, subindo a mesma altura que você desceu, desnecessariamente, pois você poderia ter ido somente ao norte no início.

Assim, vamos à questão. Não temos ainda a estrada circular, assim, temos que seguir os quadradinhos.

Veja que, para irmos ao hospital, devemos passar pela escola primeiro. Assim, vamos dividir nosso percurso em 2: M até E e E até H.

Percurso 1: M até E:

Em relação a M, E está à direita e acima. logo, devemos somente ir ao norte e ao leste, seguindo nossa regrinha de menor caminho.

Precisamos ir 7 ruas ao Leste e 2 ao Norte, mas não importa a ordem em que fazemos isso, já que eu posso primeiro subir ao norte e depois ir ao leste, bem como ir ao leste primeiro para subir depois, etc. Assim, o que temos que fazer é uma permutação entre essas possíveis rotas.

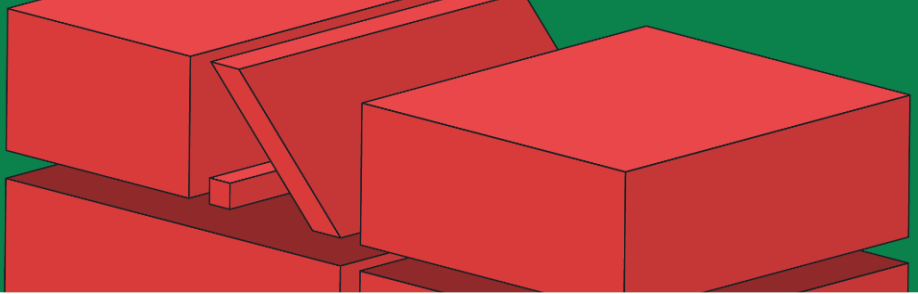
Rota Genérica:

L L L L L L L N N

Esse caso é igual aos exemplos de permutação de letras de nomes quando se repetem letras!

Temos 9 letras. A quantidade total de permutações é 9!.

Mas, a letra L se repete 7 vezes e a letra N se repete 2 vezes



Assim, o total de permutações para esse arranjo é dado por:

$$P_1 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ permutações}$$

Percurso 2: de E até H:

Devemos ir 4 casas ao sul e 2 ao Leste.

Rota genérica:

S S S S L L

Temos um arranjo de 6 letras, com a letra S aparecendo 4 vezes e a letra L aparecendo 2 vezes. Assim,

$$P_2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ permutações}$$

O total possível de caminhos, então, é dado por $P_1 \cdot P_2$:

$$\text{Total} = 36 \cdot 15 = 540$$

Resposta: D.

OBS: Caso a forma de arranjos seja complicada para você, temos outro jeito de pensar no problema:

Digamos que tenha um caminho genérico:

L L L S S

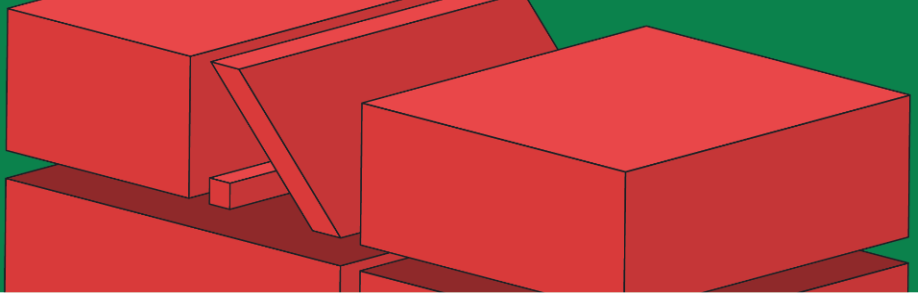
48. Se (x, y) são as coordenadas cartesianas do centro da circunferência que representa a autopista do rodoanel, então $x - y$ é igual a

- A) $\frac{1}{4}$
- B) $\frac{3}{16}$
- C) $\frac{7}{32}$
- D) $\frac{5}{32}$
- E) $\frac{9}{32}$

Resolução:

Para resolver essa questão, você tem que se lembrar das aulas de geometria plana (mais precisamente, das aulas sobre cevianas)!

Lembrete:



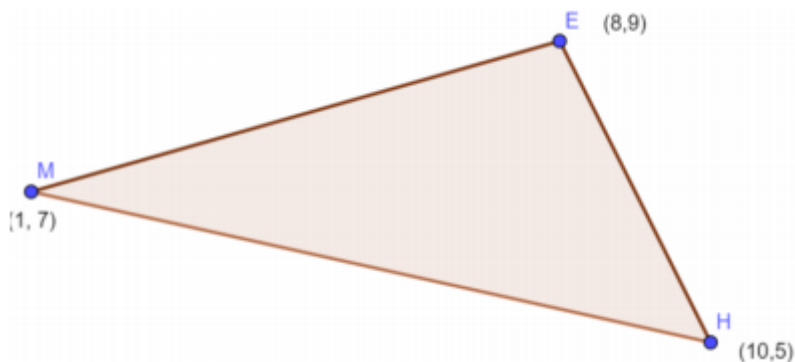
“ As mediatrizes de um triângulo se encontram em um ponto chamado circuncentro. Esse ponto é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.”

“ A mediatriz é a reta perpendicular ao lado e que o divide em 2 partes de mesmo comprimento.”

Relembrado então esses conceitos, nosso problema é exatamente isso. O centro da estrada circular é o circuncentro do triângulo formado pelos pontos M, E e H, cuja estrada o circunscribe.

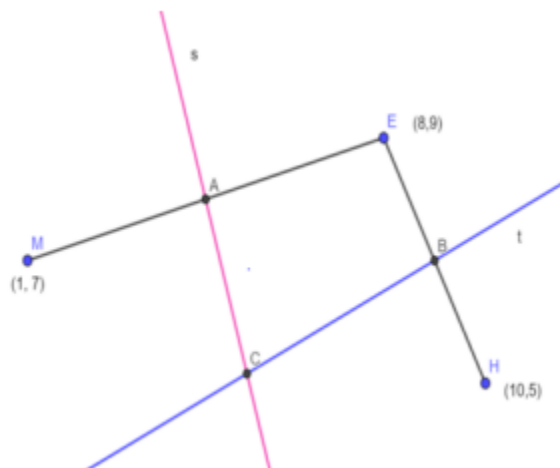
Portanto, devemos calcular as retas mediatrizes de dois dos 3 lados do triângulo e ver em que ponto elas se encontram. Esse ponto é o centro da estrada.

O triângulo MEH formado está representado a seguir:



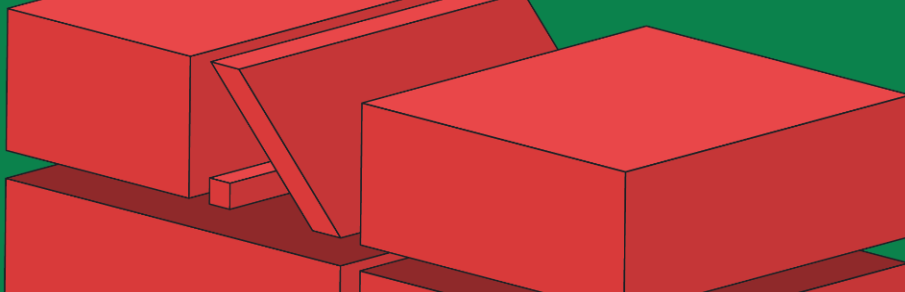
Seja A e B os pontos médios dos lados ME e EH, respectivamente, e s e t as retas mediatrizes dos lados ME e EH, bem como C o ponto de encontro de s e t.

A figura acima representa o esquema:



Vamos calcular a equação da reta suporte de EM:

Seja a reta da forma: $y = ax + b$



a é o coeficiente angular da reta;

Os pontos M e E pertencem a essa reta. Assim, substituindo os pontos na equação, temos um sistema:

- $7 = a + b$
- $9 = 8a + b$

Subtraindo a segunda da primeira, temos que:

$$9 - 7 = 8a - a + b - b \rightarrow 7a = 2$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{7}$$

Substituindo na primeira equação,

$$7 = \frac{2}{7} + b \rightarrow b = \frac{47}{7}$$

Mas veja que estamos interessados em calcular a reta perpendicular à essa reta, pois queremos a mediatriz.

Lembre-se:

Sejam a e b duas retas de coeficientes angulares m e n , respectivamente. Se a e b forem perpendiculares, então:

$$m \cdot n = -1$$

Assim, sendo m o coeficiente angular de s , temos que:

$$m \cdot a = -1 \rightarrow m \cdot \frac{2}{7} = -1 \rightarrow m = -\frac{7}{2}$$

Assim, a reta s é da forma:

$$y = -\frac{7}{2}x + k, \text{ k constante.}$$

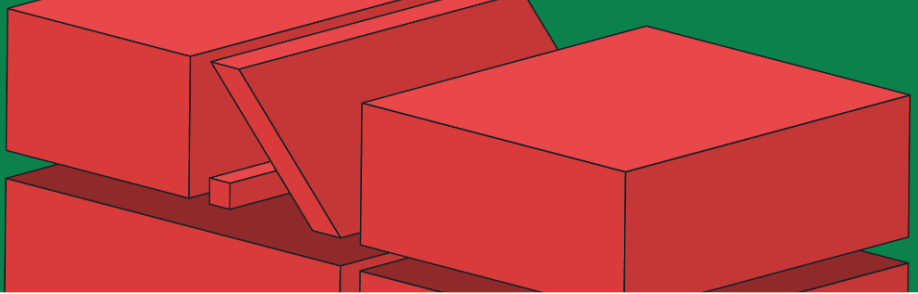
No entanto, sabemos que o ponto A pertence à reta.

Lembrete:

Se A (x_A, y_A) é o ponto médio de B (x_B, y_B) e C (x_C, y_C) , então:

$$x_a = \frac{x_b + x_c}{2} \text{ e } y_a = \frac{y_b + y_c}{2}$$

(As coordenadas do ponto médio são as médias aritméticas das coordenadas dos extremos do segmento).



Logo, o ponto A é dado por:

$$x_a = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \text{ e } y_a = \frac{9+7}{2} = 8$$

Jogando o ponto A na equação de s, obtemos:

$$8 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} + k \rightarrow k = 8 + \frac{63}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 63}{4}$$
$$\rightarrow k = \frac{32 + 63}{4} = \frac{95}{4}$$

Equação de s:

$$y = -\frac{7}{2}x + \frac{95}{4}$$

Agora, temos que fazer o mesmo processo para a reta t:

Vamos calcular a equação da reta suporte de EH

Seja a reta da forma:

$$y = ax + b$$

a é o coeficiente angular da reta;

Os pontos H e E pertencem a essa reta. Assim, substituindo os pontos na equação, temos um sistema:

- $5 = 10a + b$
- $9 = 8a + b$

Subtraindo a primeira da segunda, temos que:

$$5 - 9 = 10a - 8a + b - b \rightarrow 2a = -4$$
$$\rightarrow a = -2$$

Substituindo na primeira equação,

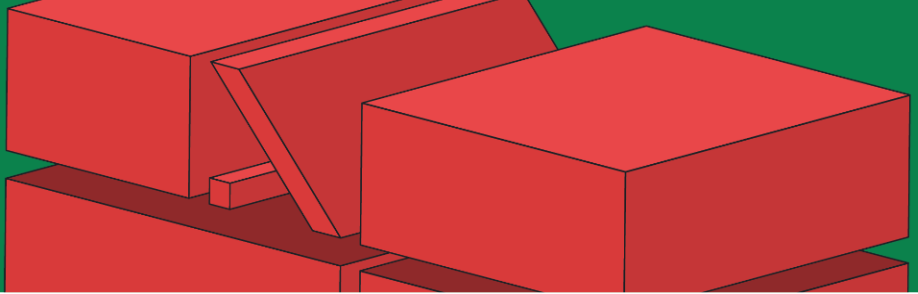
$$5 = -20 + b \rightarrow b = 25$$

Assim, sendo n o coeficiente angular de s, temos que:

$$n \cdot a = -1 \rightarrow n \cdot (-2) = -1 \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

Assim, a reta s é da forma:

$$y = \frac{1}{2}x + k, \text{ k constante.}$$



No entanto, sabemos que o ponto B pertence à reta.

Logo, o ponto B é dado por:

$$x_B = \frac{10+8}{2} = 9 \text{ e } y_a = \frac{9+5}{2} = 7$$

Jogando o ponto B na equação de t, obtemos:

$$7 = \frac{1}{2} \cdot 9 + k \rightarrow k = 7 - \frac{9}{2} = \frac{7 \cdot 2 - 9}{2}$$
$$\rightarrow k = \frac{14 - 9}{2} = \frac{5}{2}$$

Equação de t:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Por último, devemos achar a interseção das retas.

Esse ponto pertence às duas retas, assim, achá-lo é o mesmo que resolver este sistema:

- $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- $y = -\frac{7}{2}x + \frac{95}{4}$

Diminuindo a 1ª da 2ª:

$$0 = \frac{8}{2}x + \frac{10 - 95}{4}$$
$$\rightarrow \frac{8}{2}x = \frac{85}{4} \rightarrow x = \frac{85}{16}$$

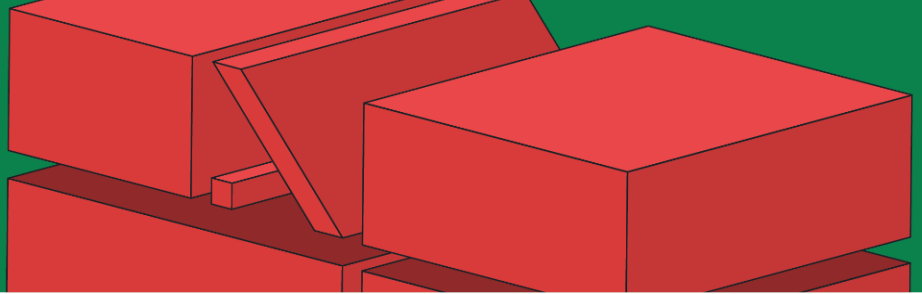
Substituindo na primeira equação,

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{16} + \frac{5}{2} = \frac{85}{32} + \frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 16}$$
$$\rightarrow y = \frac{85 + 80}{32} = \frac{165}{32}$$

A questão pede x - y:

$$x - y = \frac{85}{16} - \frac{165}{32} = \frac{170 - 165}{32} = \frac{5}{32}$$

Resposta: D



OBS: Questão super trabalhosa!

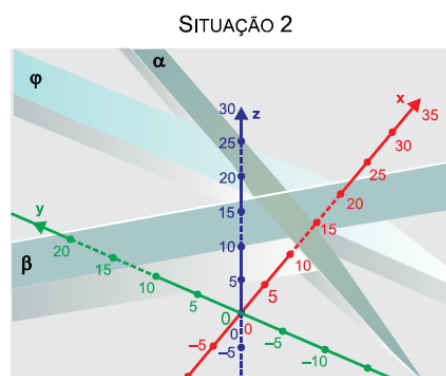
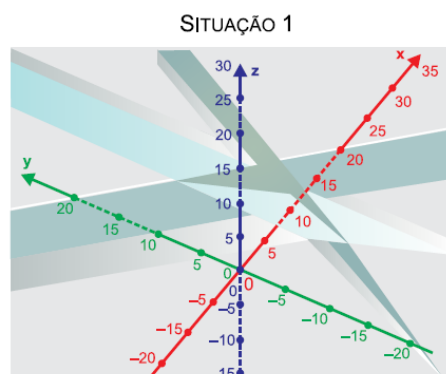
Atenção a esses tipos de questão. É tanto detalhe e tanta conta que é fácil se perder e errar alguma coisa. E isso significa tempo!

Quando isso acontecer, considere pular essa questão e resolver o resto da prova. Quando acabar, se sobrar tempo, volte para ela e tente resolver. Lembre-se que uma questão fácil e rápida nessa prova vale o mesmo de uma questão difícil! Às vezes gastamos tanto tempo em uma questão que no final não conseguimos resolver outras questões mais fáceis.

49. Nas equações do sistema linear a seguir, m é um parâmetro real e a representação gráfica de cada equação no plano cartesiano de eixos ortogonais XYZ é um plano.

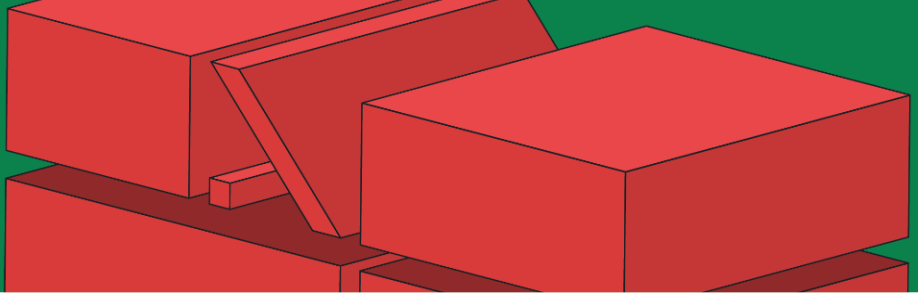
$$\begin{cases} x + y + z = 10 & \longrightarrow \text{equação 1} \\ 2x - y + z = 21 & \longrightarrow \text{equação 2} \\ x + mz = 13 & \longrightarrow \text{equação 3} \end{cases}$$

As situações 1 e 2 mostram a representação gráfica do sistema linear para dois valores distintos do parâmetro m .



Na situação 1, em que os três planos se encontram em um único ponto, o sistema linear é possível e determinado, com m _____.

Na situação 2, o plano _____ representa a equação 3, com parâmetro m igual a $\frac{2}{3}$.



Assinale a alternativa que preenche as lacunas do texto.

- A) igual a $-\frac{3}{2}$; a
- B) diferente de $\frac{2}{3}$; φ
- C) diferente de $\frac{3}{2}$; φ
- D) igual a $\frac{2}{3}$; β
- E) diferente de $\frac{2}{3}$; β

Resolução:

Na situação 1, temos que nos lembrar de conceitos sobre sistemas lineares.

Lembrete:

- Quando o sistema é SPD (possível e determinado), $\det(D) \neq 0$;
- Quando é SPI (possível e indeterminado) ou SI (impossível), $\det(D) = 0$.

Em que D é a matriz formada pelos coeficientes que acompanham as variáveis nas equações do sistema.

Assim sendo, vamos calcular $\det(D)$ para nosso sistema:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}$$

Como $\det(D) \neq 0$, temos que:

$$1 - m + 0 - 0 - (-1) - 2m \neq 0 \rightarrow -3m \neq -2$$
$$\rightarrow m \neq \frac{2}{3}$$

Já na situação 2, temos que analisar a equação:

$$x + 0y + mz = 13$$

Perceba que o coeficiente de y é 0. Isso quer dizer que para qualquer valor de y a equação funciona.

Tente pensar em 2D. Quando temos a reta $x = c$, c um número real, o coeficiente de y também é 0 e a reta representa uma reta vertical, ou seja, paralela ao eixo y .

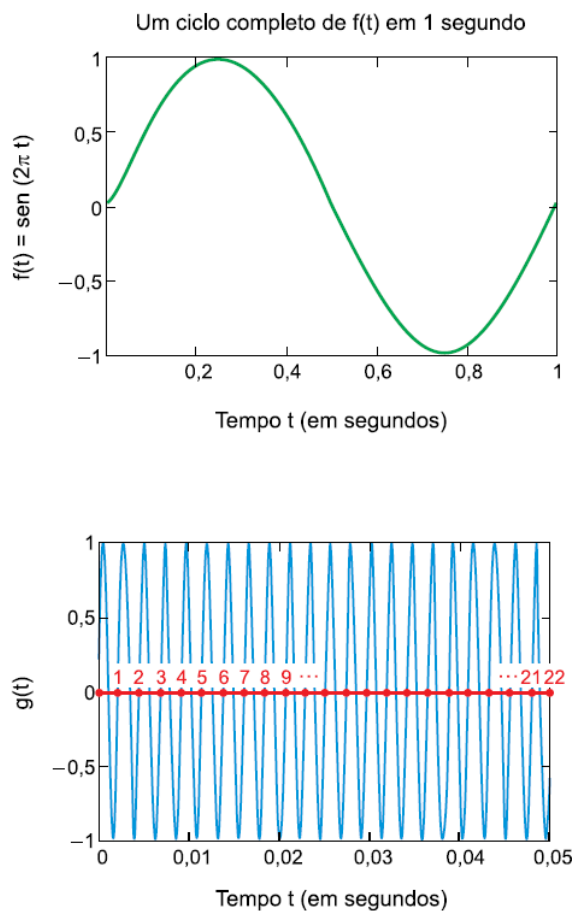
Assim, nosso plano deve ser paralelo ao eixo y , não tendo interseção com este. Logo, analisando (ou pelo menos tentando analisar) as figuras, o plano φ é o mais coerente.

Assim, a alternativa plausível é a B

Resposta: B.

Nota: A questão é bastante confusa, especialmente as figuras, que são fundamentais para realizar as questões. Apesar de ser possível resolver a questão, esperamos que a Banca tenha, nos próximos exames, consciência disso e que possa realizar figuras mais claras.

50. Os sons que ouvimos são causados por vibrações que enviam ondas de pressão pelo ar. Nossos ouvidos respondem a essas ondas de pressão e sinalizam para o cérebro sobre sua amplitude e frequência, e o cérebro interpreta esses sinais como som. As senoides indicadas nos gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ representam sons de diferentes frequências.

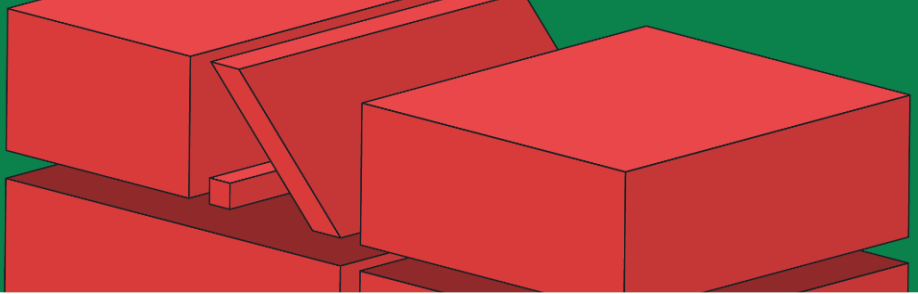


Se $g(t) = \text{sen}(k \cdot t)$, então k é igual a

- A) 440π .
- B) 20π .
- C) 40π .
- D) $0,1\pi$.
- E) 880π .

Resolução:

De acordo com o gráfico de $g(t)$, temos 22 oscilações completas em um intervalo de tempo igual a 0,05 s.



Para descobrirmos o período, devemos calcular o tempo em que 1 oscilação ocorre. Assim, devemos dividir o tempo total pelo número de oscilações nesse intervalo de tempo:

$$T = \frac{0,05 \text{ s}}{22 \text{ oscilações}} = \frac{5}{2200} = \frac{1}{440} \text{ s}$$

Se analisarmos agora o gráfico de $f(t)$, vemos que o tempo para ocorrer uma oscilação é, exatamente, 1 segundo (para saber 1 período, veja a distância entre dois pontos de posições idênticas).

Se usarmos que $t = T$ em $g(t)$, note que $g(t) = 0$, pois o gráfico começou do zero e, em um intervalo de tempo de um período, ele estará novamente no ponto em que $g = 0$.

$\text{sen}(k \cdot T) = 0 \rightarrow kT = 2\pi$, pois em um período, a função seno percorre o círculo trigonométrico exatamente uma vez.

Assim,

$$k = \frac{2\pi}{T} \rightarrow k = \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{440}{1} = 880\pi$$

Resposta: E.

Se você tiver conhecimento de ondulatória, você saberá que esse k é nada mais que a chamada frequência angular, ou ω , e já saberia a fórmula de cor.