Resolução Insper 2020.1

26. De acordo com a World Wide Fund for Nature (WWF), em 2016 o Brasil foi o quarto maior gerador de resíduos plásticos do mundo. A maior parte desses resíduos foi coletada pelo serviço de limpeza urbana, sendo que 145 mil toneladas de resíduos plásticos foram encaminhadas para reciclagem.
Dado que a quantidade de resíduos plásticos encaminhada para a reciclagem corresponde a 1,28% do total de resíduos plásticos gerados no país, o total desses resíduos gerados é um valor entre

a) 1,1 bilhão e 1,2 bilhão de toneladas.
b) 111 milhões e 112 milhões de toneladas.
c) 11 milhões e 12 milhões de toneladas.
d) 1,1 milhão e 1,2 milhão de toneladas.
e) 11 bilhões e 12 bilhões de toneladas.

Resolução:

Essa questão é apenas uma regra de três!

Temos:

145.000 t ------------------ 1,28%

x ----------------- 100%

$$\frac{x}{145000} = \frac{100}{1,28} \rightarrow x = \frac{145000\,.\,100}{1,28}$$

$$\rightarrow x \;=\; 11\,328\,125\ toneladas$$

$$\rightarrow x \;\approx\; 11,33\ milhões\ de\ toneladas$$

Ou seja, x é um número entre 11 e 12 milhões de toneladas

Resposta: C.

27. Um novo capítulo na história do café na Amazônia pode estar se abrindo este ano, com o lançamento pela Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) das 10 primeiras cultivares hídridas da espécie canéfora (Coff ea canephora). De acordo com o agrônomo Alexsandro Teixeira, as novas cultivares têm produtividade média de 80 sacas por hectare (ha) — com irrigação, essa média é de 100 sacas/ha. Hoje, a média do estado de Rondônia gira em torno de 30 sacas/ha.

Renata Silva. “O café da fl oresta”.
https://revistapesquisa.fapesp.br, agosto de 2019. Adaptado.

Atualmente, o estado de Rondônia tem uma área plantada com a espécie canéfora estimada em 72 mil hectares. Se 40% dessa área for substituída por cultivares híbridas, utilizando irrigação, e o restante permanecer produzindo a média atual, espera-se que a produção média total por hectare seja de

a) 50 sacas.
b) 65 sacas.
c) 55 sacas.
d) 40 sacas.
e) 58 sacas.

Resolução:

Se 40% da área será usada para a produtividade média de 100 sacas por hectare, os outros 60% serão utilizados com a produtividade média normal de Rondônia (30 sacas por hectare).

Assim, o total de sacas é dado pela quantidade de hectares vezes a produtividade. Por sua vez, a quantidade de hectares é dado pelo percentual das terras utilizadas multiplicado pela área total (72 mil).

O total de sacas é:

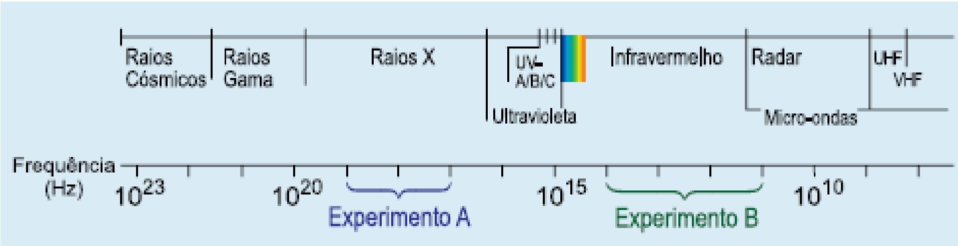
72000. 40%. 100 + 72000.60%. 30 = 72000 (0,4.100 + 0,6 . 30) = 72000 (40 + 18) = 72000 (58)

Agora, note que ele deseja a produtividade (sacas por hectare). Logo, devemos dividir pela área total o número de sacas obtido acima:

$$Pmédia = \frac{72000\ (58)}{72000} = 58\ sacas$$

Resposta: E.

28. A luz visível é apenas uma das formas de radiação que existem. A radiação eletromagnética, por exemplo, viaja por meio de ondas que não são visíveis ao ser humano, mas podem ser medidas por meio de instrumentos. Considere os experimentos A e B, que utilizaram ondas com as frequências indicadas na figura.



Sabe-se que o comprimento de onda é igual à velocidade da onda dividida pela frequência da onda, e que as ondas dos dois experimentos foram propagadas em uma mesma velocidade. Sendo λ_b o menor comprimento de onda observado no experimento B e λ_A o maior comprimento de onda observado no experimento A, pode-se afirmar que $\frac{\lambda_A}{\lambda_b}$ é igual a

a) 10^{-5}.
b) 10^{-8}.
c) 10^{-6}.
d) 10^{-7}.
e) 10^{-3}.

Resolução:

A questão afirma que a velocidade dos dois comprimentos de onda é igual (e aqui chamaremos ela de v).

Além disso, como o comprimento de onda é igual ao quociente entre velocidade e frequência, temos que:

$$\lambda_A = \frac{v}{f_A} \text{ e } \lambda_B = \frac{v}{f_B}$$

Observe que λA é inversamente proporcional à f_A.

Lembrete:

Se duas grandezas são inversamente proporcionais, então quanto maior uma das duas, menor a outra (e vice-versa).

Assim, se A é o maior comprimento de onda, sua frequência deverá ser a menor na faixa do experimento A. O inverso ocorre com B (menor comprimento de onda e maior frequência).

Observe que cada tracinho andado para a direita no gráfico significa uma diminuição de 10 vezes a frequência (a potência de 10 diminui em uma unidade seu expoente).

Logo, na faixa de A, a menor frequência é

$$f_A = 10^{17} Hz$$

e na faixa de B, a maior frequência é:

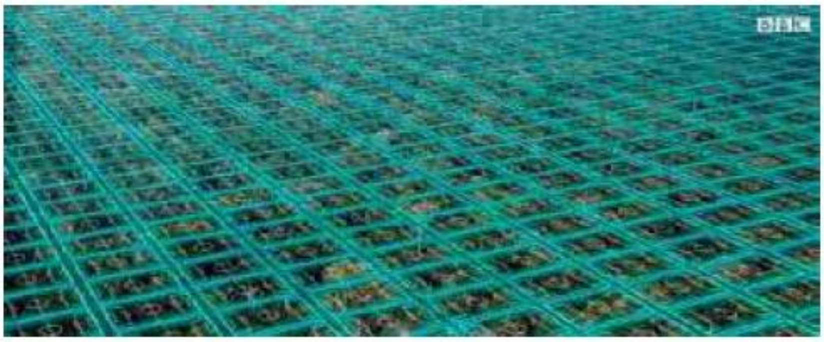
$$f_B = 10^{14} Hz$$

Assim,

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{v}{10^{17}} . \frac{10^{14}}{v} = \frac{10^{14}}{10^{17}} = 10^{14-17} = 10^{-3}$$

Resposta: E.

29. O editor de ciência da BBC, David Shukman, esteve na Amazônia brasileira para fazer uma reportagem para o site BBC News sobre o desmatamento na região. Segundo a reportagem feita, uma área do tamanho de um campo de futebol é destruída por minuto na região.



(www.bbc.com, 05.07.2019.)

Considerando que as medidas oficiais de um campo são 90 metros por 120 metros, de acordo com os dados da reportagem, em 24 horas, a área destruída na região da Amazônia brasileira é, aproximadamente,

a) 15,5 km²
b) 15 500 km²
c) 930 km²
d) 6 500 km²
e) 6,5 km²

Resolução:

Primeiro, vamos calcular a área de um campo de futebol. Como é um retângulo, sua área é o produto de suas dimensões:

$$A = 90.120 = 10.800\ m^2$$

A área desmatada total é dada pela área desmatada por minuto, multiplicada pelo número de minutos do intervalo de tempo a que se refere.

A quantidade de minutos em 24h, tendo em vista que 1h possui 60 minutos, é:

$$t = 24.60 = 1440 \text{ minutos}$$

Assim,

$$Atotal = 10800 \,.\, 1440 = 15.552.000\ m^2$$

Lembrete:

Para passar de m para km, dividimos por 1000.

Para passar de m^2 para km^2, então, dividimos por $1000^2 = 1000000$.

Logo, nossa área total em km^2 é:

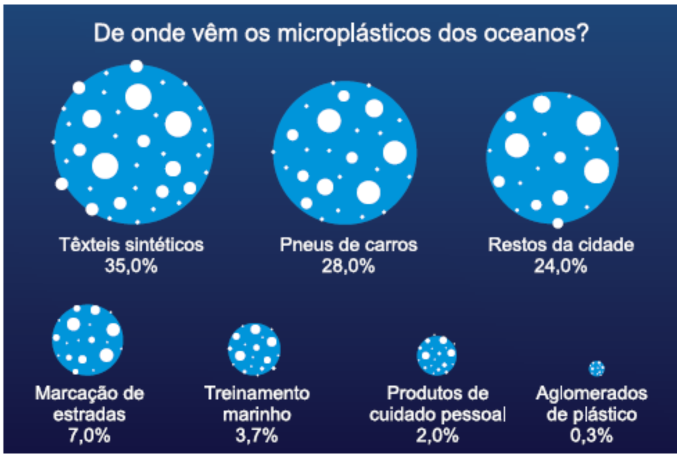
$$Atotal = \frac{15.552.000}{1000000} = 15{,}552\ km^2 \approx 15{,}5\ km^2$$

Resposta: A.

30. Os microplásticos são fragmentos de plásticos com dimensões micrométricas. Embora sua presença nos oceanos seja conhecida desde os anos 1970, apenas em 2004 o termo "microplástico" foi incorporado à literatura científica pelo pesquisador britânico Richard Thompson, professor de biologia marinha da Universidade de Plymouth, na Inglaterra. Os oceanos são o repositório de boa parcela do microplástico produzido em terra, uma vez que recebem as águas de rios, riachos e esgotos.

(https://revistapesquisa.fapesp.br, julho de 2019. Adaptado.)

Observe o gráfico sobre a distribuição de fontes de microplásticos nos oceanos do mundo.



Considerando que as áreas dos circulos são proporcionais ao respectivo percentual indicado e adotando raio R para o círculo que representa os têxteis sintéticos e raio r para o que apresenta os pneus de carros, com R e r medidos na mesma unidade, tem-se que R pode ser escrito em função de r da seguinte forma:

a)
$$R = \frac{107}{100} \cdot r$$

b)
$$R = \frac{17}{15} \cdot r$$

c)
$$R = \frac{5}{4} \cdot r$$

d)
$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r$$

e)
$$R = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \cdot r$$

Resolução:

● O texto menciona que as áreas dos círculos são proporcionais ao percentual indicado. Assim, podemos escrever:

$$A = k.\mathrm{P}$$

Em que A é a área do círculo, k é uma constante e P é o percentual.

Para os têxteis sintéticos, $P = 35\%$ e $A = \pi R^2$;

Para os pneus de carro, $P = 28\%$ e $A = \pi r^2$.

Logo,

- $\pi R^2 = k.35$
- $\pi r^2 = k.28$

Dividindo a primeira equação pela primeira,

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{35k}{28k} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$$

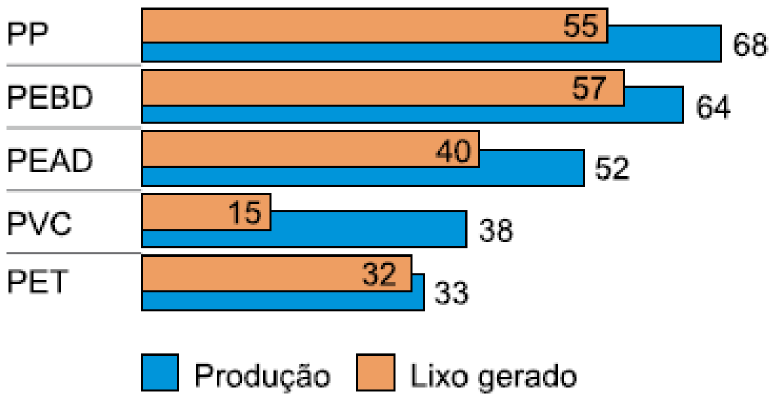
$$\rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2}.r$$

Resposta: D

31. O gráfico mostra a produção e a geração de lixo, em milhões de toneladas, de cinco tipos de plásticos no ano de 2015.

Mercado global e geração de lixo



(https://revistapesquisa.fapesp.br, julho de 2019. Adaptado.)

Dentre os tipos de plásticos apresentados no gráfico, aquele que apresenta a maior razão entre quantidade de lixo gerado e produção é o

a) PEDB.
b) PP.
c) PVC.
d) PEAD.
e) PET.

Resolução:

Dividindo os valores de lixo gerado (laranja) e produção (azul), temos:

$$PP = \frac{55}{68} = 0{,}81$$

$$PEBD = \frac{57}{64} = 0{,}89$$

$$PEAD = \frac{40}{52} = 0{,}77$$

$$PVC = \frac{15}{38} = 0{,}39$$

$$PET = \frac{32}{33} = 0{,}97$$

A maior, portanto, é a do PET.

Resposta: E.

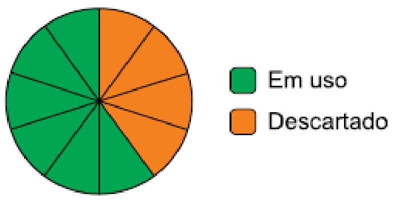
OBS: Numa situação de prova, você não precisa calcular todas! Note que, como a quantidade de lixo gerado é sempre menor que a produção no gráfico, a razão é sempre menor que 1. No entanto, a maior razão acontecerá na situação em que o numerador estiver mais próximo do denominador (e então a razão tenderá para 1). Dentre todos os casos, fica bem óbvio que o PET deverá possuir a maior razão e que o PVC deverá ter a menor. Pense nisso antes de gastar tempo!

32. Estima-se que 8,9 bilhões de toneladas de plásticos já foram fabricados desde meados do século passado, quando começaram a ser produzidos em escala industrial.

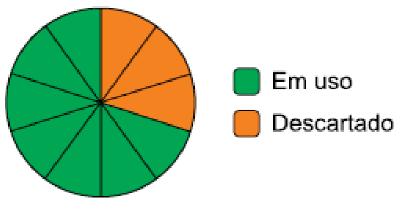
(https://revistapesquisa.fapesp.br, julho de 2019. Adaptado.)

Dessa quantidade de plástico fabricado, parte está em uso e o restante foi descartado, sendo que a quantidade de plástico descartado supera em 3,7 bilhões de toneladas a quantidade de plástico em uso. Assim, o gráfico de setores que melhor representa a quantidade de plástico em uso e descartado é:

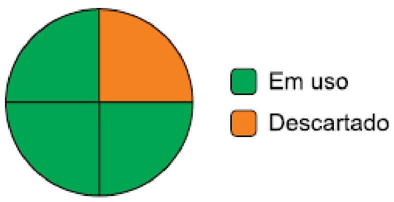
a)



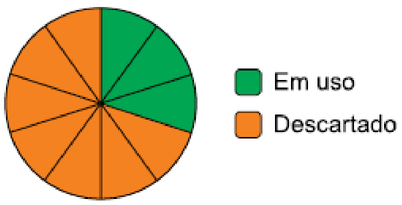
b)



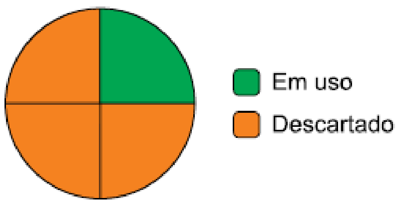
c)



d)



e)



Resolução:

Vamos calcular o percentual em relação ao todo que o plástico descartado supera o em uso:

$$P = \frac{3{,}7}{8{,}9} = \frac{37}{89} = 41{,}5\%$$

Para marcarmos nosso gráfico, devemos primeiro ter a noção que a cor predominante é a laranja, pois a quantidade descartada é 41,5% maior que a em uso.

Isso exclui as alternativas A, B e C.

Na alternativa E, o gráfico está dividido em 4 pedaços. Cada pedaço, então, representa:
$\frac{100}{4}$ = 25%. Temos 3 pedaços laranja e 1 verde, ou seja, 75% e 25%, respectivamente.

A diferença nesse caso é 50%, o que é maior que 41,5% que achamos no início.

Já no item D, o gráfico está dividido em 10 pedaços, cada qual com $\frac{100}{10}$ = 10%. Temos 3 pedaços verdes (30%) e 7 pedaços laranja (70%).

A diferença é 70 - 30 = 40%, que está mais próximo dos 41,5%.
Logo, a alternativa mais adequada é a do item D.
Resposta: D

33. Alguns benefícios que o plástico oferece à sociedade são difíceis de serem substituídos. Na produção de carros, por exemplo, cada 150 quilos a menos no peso de um automóvel faz com ele rode 1 quilômetro (km) a mais por litro de combustível. Os carros de hoje têm, em média, 200 quilos de plásticos em sua estrutura, que substituem 1 tonelada de metal.

(https://revistapesquisa.fapesp.br, julho de 2019. Adaptado.)

De acordo com as informações apresentadas, a substituição do metal por plástico na produção de carros implica em um aumento na rodagem por litro de combustível de

a)
$\frac{4}{3}$ km
b)
$\frac{17}{3}$ km
c)
$\frac{16}{3}$ km
d)
$\frac{19}{3}$ km
e)
$\frac{20}{3}$ km

Resolução:

A cada 150 quilos **a menos** no peso de um automóvel significa 1km a mais por litro de combustível.

Logo, devemos calcular o quanto de peso foi economizado com o uso de plástico.

De acordo com a questão, 200 quilos de plástico substituem 1 tonelada (ou 1000 quilos) de metal. Assim:

$$Peso\ metal = 1000\ \text{kg}$$
$$Peso\ plástico = 200\ \text{kg}$$

O peso economizado é:

$$P = Peso\ metal - Peso\ plástico = 1000 - 200 = 800\ \text{kg}$$

Devemos, agora, aplicar uma regra de três simples:

150 quilos ------------------ 1 litro
800 quilos ------------------ x litros

$$\frac{x}{1} = \frac{800}{150} \rightarrow x = \frac{16}{3}\ litros$$

Resposta: C.

34. Nos últimos anos, Juliana conseguiu juntar 150 mil reais. Agora, ela contratou os serviços de uma gestora financeira e recebeu um plano de aplicações e investimentos que visava ao acúmulo de determinada quantia de dinheiro, cuja rentabilidade seria suficiente para custear seu modo de vida. O plano recebido utilizava os 150 mil reais como valor inicial, além de aportes anuais de 18 mil reais, e uma taxa de juros anual de 9,0%, já descontada a inflação. O montante obtido, de acordo com esse plano, está detalhado na tabela:

Data	Valor a ser aplicado (em milhares de reais)	Montante obtido (em milhares de reais)
01.10.2019	150	150
01.10.2020	18	$150 \cdot 1{,}09 + 18$
01.10.2021	18	$150 \cdot 1{,}09^2 + 18 \cdot 1{,}09 + 18$
01.10.2022	18	$150 \cdot 1{,}09^3 + 18 \cdot 1{,}09^2 + 18 \cdot 1{,}09 + 18$
...	...	...
01.10.2029	18	$150 \cdot 1{,}09^{10} + 18 \cdot 1{,}09^9 + \ldots + 18 \cdot 1{,}09 + 18$

Assim, o montante obtido, em milhares de reais, daqui a t anos pode ser determinado pela expressão

a) $350 \cdot 1{,}18^{t} - 200$

b) $150 \cdot 1{,}09^{t} + 18 \cdot 1{,}09^{t-1}$

c) $150 \cdot 1{,}09^{t} + 200 \cdot 0{,}09^{t}$

d) $150 + 1{,}18 \cdot 1{,}09^{t-1}$

e) $350 \cdot 1{,}09^{t} - 200$

Resolução:

Vamos identificar o que acontece de um ano a outro:

Basicamente, de um ano a outro, multiplica-se o montante do ano anterior por 1,09 (aplicação dos 9% de juros) e soma-se 18 mil reais dos aportes anuais.

Se Mi for o montante após i anos, temos:

$$M_0 = 150$$

$$M_1 = 150 \,.\, 1{,}09 + 18 = M_0 . 1{,}09 + 18$$

$$M_2 = (150 \,.1{,}09 + 18). 1{,}09 + 18 = M_1 . 1{,}09 + 18$$

$$\rightarrow M_2 = 150. (1{,}09)^2 + 18. (1{,}09) + 18$$

$$M_3 = M_2 . 1{,}09 + 18$$

$$M_3 = (150. (1{,}09)^2 + 18. (1{,}09) + 18). 1{,}09 + 18$$

$$M_3 = 150. (1{,}09)^3 + 18. (1{,}09)^2 + 18. (1{,}09) + 18$$

Já deu para perceber a fórmula geral, não?

$$M_t = 150. (1{,}09)^t + 18. (1{,}09)^{t-1} + \ldots + 18. (1{,}09) + 18$$

$$\rightarrow M_t = 150. (1{,}09)^t + 18\,[\,(1{,}09)^{t-1} + \ldots + 1{,}09 + 1]$$

Veja que o termo que multiplica 18 é uma **PG de razão 1,09 com t termos e 1 como primeiro termo.**

Lembrete:

A soma dos n termos de uma PG de primeiro termo a1 e razão q é:

$$S_n = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1}$$

Assim,

$$(1{,}09)^{t-1} + \ldots + 1{,}09\ + 1 = \frac{1.((1{,}09)^{t} - 1)}{1{,}09 - 1} = \frac{(1{,}09)^{t} - 1}{0{,}09}$$

$$= \frac{100.\,(1{,}09)^{t} - 1)}{9}$$

Então,

$$M_t = 150.\,(1{,}09)^{t}\ +\ 18\,[\,(1{,}09)^{t-1} + \ldots + 1{,}09\ + 1]$$

$$\rightarrow M_t = 150.\,(1{,}09)^{t}\ + 18\,\frac{100.\,((1{,}09)^{t} - 1)}{9}$$

$$= 150.\,(1{,}09)^{t}\ +\ 2.100.\,((1{,}09)^{t} - 1)$$

$$= 150.\,(1{,}09)^{t}\ + 200.\,(1{,}09)^{t} - 200$$

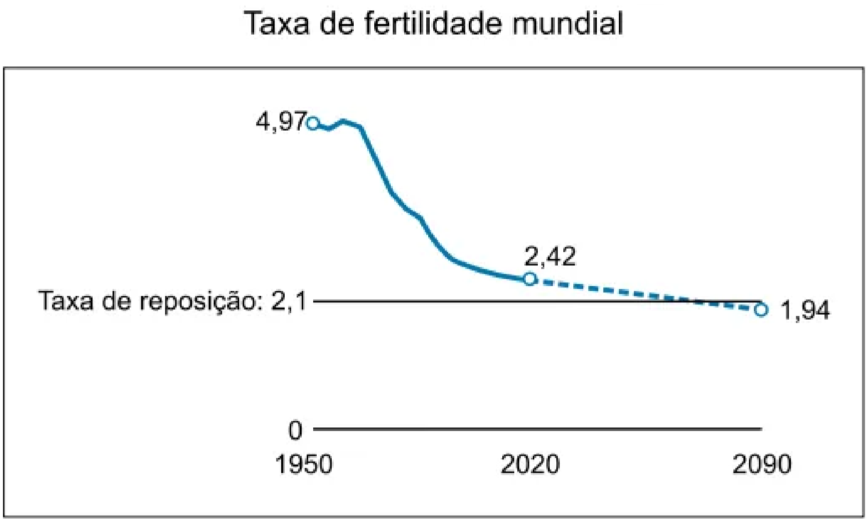
$$= \ 350.\,(1{,}09)^{t} - 200$$

Resposta: E.

Obs: Caso você tenha dificuldade que a PG da questão tem t termos, veja que temos 1,09 elevado de 1 até t-1, sendo t -1 termos, além do termo 1, totalizando t termos.

Utilize as informações a seguir para responder às questões **35** e **36**.

Historicamente, a taxa de fertilidade mundial tem diminuído ao longo dos anos. Inclusive, projeta-se que a taxa de fertilidade fique abaixo da taxa de reposição, que corresponde ao número médio de nascimentos por mulher necessário para manter constante o tamanho da população. O gráfico a seguir ilustra esse cenário.



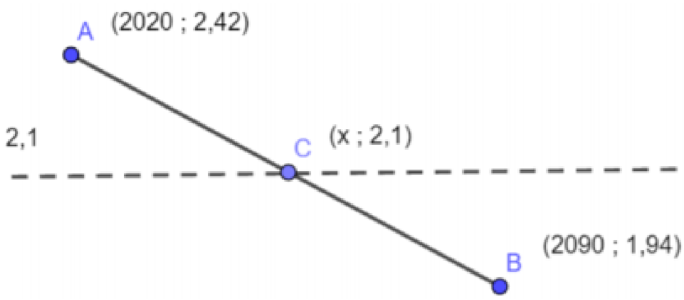
(www.pewresearch.org. Adaptado.)

35. Considerando que a projeção da taxa mundial de fertilidade de 2020 a 2090 seja linear, essa taxa passará a ser inferior à taxa de reposição, pela primeira vez, entre os anos de

a) 2063 e 2064.
b) 2066 e 2067.
c) 2056 e 2057.
d) 2046 e 2047.
e) 2043 e 2044.

Resolução:

Caso essa projeção seja linear, teremos uma reta, representada pelos dois pontos, vide a figura:



Note que, no eixo x (abscissas), temos o ano e no eixo y (ordenadas), a taxa de reposição.

O problema se resume a achar a abscissa do ponto C, que representa em que ano a reta dessa projeção passará pela taxa de 2,1.

Para isso, vamos achar a equação da reta suporte de AB, que é da forma:

$$AB: y = a.x + b$$

Sabemos que os pontos A e B pertencem à reta. Assim, substituindo tais pontos nessa equação, obtemos um sistema:

$$2{,}42 = 2020a + b$$
$$1{,}94 = 2090a + b$$

Subtraindo a segunda da primeira equação:

$$1{,}94 - 2{,}42 = 2090a - 2020a + b - b$$

$$\rightarrow 70a = -0{,}48 \rightarrow a = \frac{-0{,}48}{70}$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$2{,}42 = 2020.\frac{-0{,}48}{70} + b \rightarrow 2{,}42 = 28{,}86.(-0{,}48) + b$$

$$\rightarrow 2{,}42 = -13{,}85 + b \rightarrow b = 16{,}27$$

Logo, quando y for 2,1, devemos achar x substituindo na equação:

$$2{,}1 = \frac{-0{,}48}{70}.x + 16{,}27 \rightarrow \frac{-0{,}48}{70}x = 14{,}17$$

$$\rightarrow x = \frac{70.(14{,}17)}{0{,}48} = 2066{,}7$$

Logo, x estará entre 2066 e 2067

Resposta: B

36. A função do 1o grau que descreve a projeção da taxa de fertilidade mundial (T) para o ano n, com 2020 < n < 2090, é

a)

$$T(n) = 2{,}42 - \frac{6}{875} \cdot (n - 2020)$$

b)

$$T(n) = 2{,}42 - \frac{2}{375} \cdot n$$

c)

$$T(n) = 2{,}42 - \frac{6}{875} \cdot n$$

d)

$$T(n) = 2{,}42 - \frac{12}{25} \cdot n$$

e)

$$T(n) = 2{,}42 - \frac{2}{375} \cdot (n - 2020)$$

Resolução:

No processo de fazer a questão anterior, já fizemos essa!

Ele quer nada mais que a equação da reta, que é dada por:

$$y = \frac{-0{,}48}{70} . x + 16{,}27$$

Nesse caso, x = n:

$$y = \frac{-0{,}48}{70} . n + 16{,}27$$

Poderíamos testar as alternativas que bateriam com essa equação. Ou, podemos lembrar que:

Lembrete:

A equação geral da reta de coeficiente angular m passando por um ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$(y - y_0) = m\,(x - x_0)$$

m pode ser calculado quando se tem 2 pontos quaisquer distintos de uma reta, digamos A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, sendo A o ponto (x0, y0) e A e B os pontos usados para calcular m, temos:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.(x - x_A)$$

$$y - 2{,}42 = \frac{1{,}94 - 2{,}42}{2090 - 2020}.(n - 2020)$$

$$y = 2{,}42 + \frac{-0{,}48}{70}.(n - 2020)$$

Note que

$$\frac{-0{,}48}{70} = \frac{-0{,}48.12{,}5}{70.12{,}5} = \frac{-6}{875}$$

Logo,

$$y = T(n) = 2{,}42 - \frac{6}{875}.(n - 2020)$$

Resposta: A.

Obs: Na última parte, basicamente, caso você não tenha essa ideia algébrica, basta testar a fração que está no item A e a do item E para ver qual bate com o valor da fração achada inicialmente. Os itens b, c e d já estavam descartados quando vimos o formato de T(n).

37. O ouro é um metal utilizado na confecção de diversos produtos e costuma ser misturado com outros metais, gerando ligas de ouro. Por exemplo, uma liga de ouro 800 indica que de cada 1000 partes da liga de ouro, 800 são de ouro puro e 200 são de outros metais.

Um artesão precisa de 10 gramas de liga de ouro 585 para confeccionar um produto; porém, em seu estoque há apenas ligas de ouro 750 e 375. Ele dispõe de quantidade sufi ciente dessas duas ligas para fundi-las e obter a quantidade de liga de ouro 585 de que necessita. Para obter exatamente 10 gramas de liga de ouro 585, a quantidade de liga de ouro 750 utilizada na fundição deverá superar a quantidade de liga de ouro 375 em

a) 1,20 g.
b) 2,25 g.
c) 4,60 g.
d) 0,80 g.
e) 5,60 g.

Resolução:

Primeiro, sabemos que o artesão precisa de 10 gramas de liga de ouro para o produto. Logo, sendo x a quantidade em gramas da liga 750 e y a quantidade em gramas da liga 375, como misturaremos as duas, a soma dos seus pesos deve dar 10 gramas, isto é: $x + y = 10$

E agora, temos 2 variáveis e 1 equação. O que fazer?

Temos que usar as informações das ligas (o fato de serem ligas de 750 e 375).

Vamos calcular a quantidade de ouro puro que o artesão precisa.

Note que, se a liga de ouro for uma liga K, isso quer dizer que temos K gramas de ouro puro para cada 1000 gramas. Então, se quisermos a quantidade de ouro em 1 grama de liga, temos:

K ------------------- 1000

n -------------------   1

$$\rightarrow \frac{K}{n} = \frac{1000}{1} \rightarrow n = \frac{K}{1000}$$

Logo, a quantidade de gramas de ouro puro em 1 grama da liga é obtida dividindo o número da liga por 1000.

Em 1 grama da liga de 750 e de 375, temos, respectivamente $\frac{750}{1000} = 0{,}75$ e $\frac{375}{1000} = 0{,}375$ gramas de ouro puro.

Então, a quantidade de gramas de ouro puro em t gramas da liga vai ser dada pelo produto da quantidade de ouro por grama por t.

Com isso, sabemos que a quantidade de ouro puro somada das duas ligas deve dar a quantidade de ouro necessária para o artesão, isto é:

$$\frac{585}{1000}.10 = 5{,}85g\ ouro\ puro$$

Então, conseguimos a segunda equação:

$$0{,}75\,x + 0{,}375y = 5{,}85$$

Multiplicando os dois lados da equação por 8,

$$0{,}75.8.x + 8.0{,}375y = 8.5{,}85$$

$$\rightarrow 6x + 3y = 46{,}8$$

Nosso sistema é

- $x + y = 10$

- $6x + 3y = 46{,}8$

Multiplicando a primeira por 3:

- $3x + 3\ y = 30$

- $6x + 3y = 46{,}8$

Fazendo a segunda diminuída da primeira:

$$6x - 3x + 3y - 3y = 46{,}8 - 30$$

$$\rightarrow 3x = 16{,}8 \rightarrow x = \frac{16{,}8}{3} = 5{,}6$$

Lembrando que $x + y = 10$

então: $5{,}6 + y = 10 \rightarrow y = 10 - 5{,}6 = 4{,}4$

Para sabermos quanto a quantidade da liga 750 supera a 375, basta subtrairmos a quantidade das duas, ou seja, x - y: $D = x - y = 5{,}6 - 4{,}4 = 1{,}2$

Resposta: A

A fertilidade do solo é essencial na produção agrícola e a produtividade de cada tipo de solo varia com a quantidade de nutrientes aplicados a ele.

Foram realizados em vasos, experimentos de aplicação de diferentes doses de enxofre em dois tipos de solo: Latossolo Vermelho-Escuro (LE) e Areia Quartzosa (AQ).

38. O estudo da produção do solo LE apresentou os seguintes resultados:

Quantidade de enxofre (em kg/ha)	0	10	20	30	40	50
Produção de matéria seca (em g/vaso)	6,5	10,0	12,5	14,0	14,5	14,0

Para o solo LE, a função que modela a produção P de matéria seca, em g/vaso, em função da quantidade q de enxofre utilizado, em kg/ha, é uma função quadrática, descrita por

a)
$P(q) = 6{,}5 + 0{,}3q + 0{,}005q^2$
b)
$P(q) = 6{,}5 + 0{,}55q - 0{,}002q^2$
c)
$P(q) = 6{,}5 + 0{,}3q - 0{,}005q^2$
d)
$P(q) = 6{,}5 + 0{,}4q - 0{,}005q^2$
e)
$P(q) = 6{,}5 + 0{,}15q + 0{,}002q^2$

Resolução:

Vamos fazer de 2 modos:

Solução 1: Jeito “na marra”:

Queremos P em função de q.

Note que o texto diz que P(q) é uma função quadrática, ou seja, do segundo grau.

Assim, podemos dizer que:

$P(q) = a.\, q^2 + bq + c$, com a, b e c a serem determinados.

Então, temos que substituir 3 pares P e q que estão na tabela e determinar os valores de a, b e c:

- Quando q = 0, P(q) = 6,5:

$$6{,}5 = a.0^2 + 0.b + c = c \rightarrow c = 6{,}5$$

$$\rightarrow P(q) = a.q^2 + bq + 6{,}5$$

- Quando q = 10, P(q) = 10:

$$10 = a.10^2 + 10.b + 6{,}5$$

$\rightarrow 100\,a + 10\,b = 3{,}5$ (1)

- Quando q = 30, P(q) = 14:

$$14 = a.30^2 + 30.b + 6{,}5$$

$$\rightarrow 14 - 6{,}5 = 900\,a + 30\,b$$

$\rightarrow 7{,}5 = 900\,a + 30\,b$ (2)

Multiplicando (1) por 3, nosso sistema fica:

- $300\,a + 30\,b = 10{,}5$
- $7{,}5 = 900\,a + 30\,b$

Subtraindo a de baixo pela de cima:

$$7{,}5 - 10{,}5 = 600a + 0b \rightarrow 600\,a = -3$$

$$\rightarrow a = \frac{-3}{600} = \frac{-1}{200} = -0{,}005$$

Substituindo o valor de a em (1),

$$100.(-0{,}005) + 10\,b = 3{,}5$$

$$\rightarrow -0{,}5 + 10b = 3{,}5 \rightarrow 10\,b = 4$$

$$\rightarrow b = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Assim, P(q) está determinado:

$$P(q) = -0{,}005\,q^2 + 0{,}4\,q + 6{,}5$$

Solução 2: Jeito "sacada":

Note que, para q = 30 e q = 50, P(q) = 14

Mas, vamos enxergar isso de outra forma:

Para q = 30 e q = 50, P(q) - 14 =0, ou seja, 30 e 50 são raízes de P(q) - 14.

Lembrete: Se m e n são raízes do polinômio:

$$P(x) = a.\, x^2 + b.\, x + c$$

Então P(x) pode ser reescrito da forma:

$$P(x) = a.\, (x - m).\, (x - n)$$

Portanto, podemos reescrever nossa expressão assim:

$$P(q) - 14 = a.\, (q - 30).\, (q - 50)$$

Agora, precisamos de outro par P,q do gráfico para determinarmos o valor de a. Por conveniência, escolhamos o que q = 0 (e P = 6,5):

$$P(0) - 14 = a.(0 - 30).(0 - 50)$$

$$6{,}5 - 14 = a.(-30).(-50) = 50.30.a = 1500.a$$

$$\rightarrow a = \frac{-7{,}5}{1500} = -0{,}005$$

Assim,

$$P(q) - 14 = -0{,}005.(q - 30).(q - 50)$$

$$\rightarrow P(q) - 14 = -0{,}005.(q^2 - 50q - 30q + 1500)$$

$$\rightarrow P(q) = 14 - 0{,}005q^2 + 0{,}4q - 7{,}5$$

$$\rightarrow P(q) = -0{,}005\, q^2 + 0{,}4\, q + 6{,}5$$

Resposta: D.

39. Dado que, para o solo AQ, a produção R de matéria seca, em g/vaso, em função da quantidade q de enxofre utilizado, em kg/ha, é dada por $R(q) = 5{,}5 + 0{,}2q - 0{,}001q^2$, a produção será máxima quando a dosagem de enxofre for:

a) 72,7 kg/ha.
b) 137,5 kg/ha.
c) 181,0 kg/ha.
d) 100,0 kg/ha.
e) 200,0 kg/ha.

Resolução:

A função R(q) é quadrática e, portanto, seu gráfico é uma parábola.
Devemos lembrar alguns conceitos sobre parábolas para resolvermos a questão:

Lembrete:

- O vértice da parábola de equação:

$y = a.x^2 + bx + c$ possui coordenadas dadas por:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Em que:

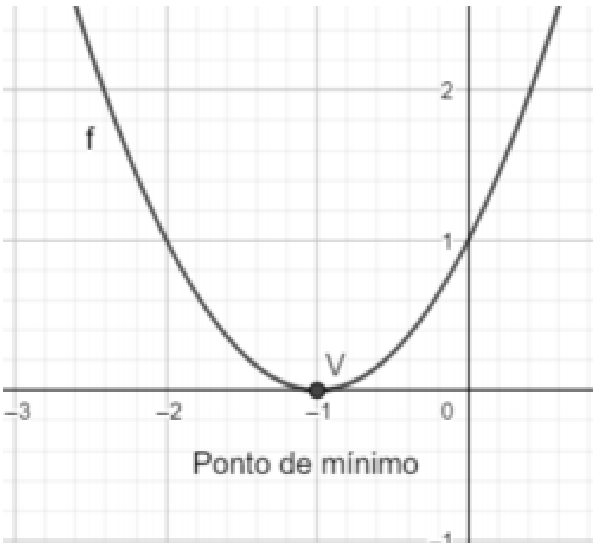
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

O vértice da parábola tem um significado especial:

O vértice pode significar um ponto de mínimo ou de máximo da parábola. Assim, temos que dividir em 2 casos:

Caso 1: $a > 0$

Nesse caso, **a concavidade da parábola é virada para cima:**



Como mostrado na figura, V representa o ponto mais baixo da parábola, já que sua concavidade é virada para cima (forma de "U").

Assim, V é ponto de mínimo.

Caso 2: $a < 0$

Nesse caso, **a concavidade da parábola é virada para baixo:**

De acordo com a figura, V representa o ponto mais baixo da parábola, já que sua concavidade é virada para baixo.

Assim, V é ponto de máximo.

Voltando à questão:

$$R(q) = -0{,}001q^2 + 0{,}2q + 5{,}5$$

Representa uma parábola de **concavidade para baixo**, pois $-0{,}001 = a < 0$.

Assim, seu vértice será o **ponto de máximo**.

Note que a questão pede o valor de q para que R(q), ou a produção de matéria seca, seja máxima, o que é exatamente o x do vértice.

Como já vimos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}2}{2.(-0{,}001)} = \frac{-0{,}2}{-0{,}002} = \frac{200}{2} = 100$$

Resposta: D.

Note que a questão em si é muito direta se você souber as fórmulas de x e y do vértice. Então, se ainda não conhecia, trate de memorizar!

40.

Um levantamento feito pela Secretaria de Desenvolvimento Econômico de um município apontou os seguintes dados sobre os fundadores de microempresas nos últimos 5 anos:

De acordo com esse levantamento, constata-se que nos últimos 5 anos o número de microempresas que apresentam homens como fundadores supera o número de microempresas que apresentam mulheres como fundadoras em, aproximadamente,

a) 35%.
b) 90%.
c) 38%.
d) 52%.
e) 190%.

Resolução:

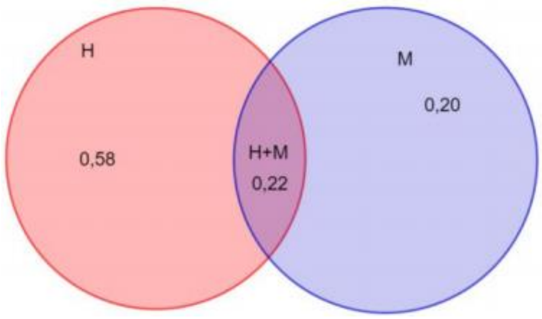
Seja X o totl de microempresas da pesquisa.

- 58% de X (0,58X) possuem **APENAS** homens como fundadores apenas;
- 20% (0,20) de X possuem **APENAS** mulheres como fundadoras.
- O que sobrou é dado por:

$$X - (0{,}58 + 0{,}20).X = 0{,}22X = 22\% \; de \; X$$

Veja que esses 22% representam as empresas que foram formadas por homens e mulheres.

A distribuição acima pode ser representada a seguir:



Note que:

- O total de empresas **administradas por homens** abrange as somente formadas por homens **e** as formadas por homens e mulheres

total: $0{,}58\,X + 0{,}22\,X = 0{,}80\,X$

- O total de empresas **administradas por mulheres** abrange as somente formadas por mulheres se **e** as formadas por homens e mulheres

total: $0{,}20\,X + 0{,}22\,X = 0{,}42\,X$

A questão pede **o quanto a quantidade de empresas fundadas por homens *supera* as formadas por mulheres**.

Então, devemos calcular a diferença entre os números de empresas de homens e as de mulheres e ver qual o percentual que isso representa com relação ao número de empresas de mulheres.

Ou seja,

$$P = \frac{0{,}80X - 0{,}42X}{0{,}42X} = \frac{0{,}38X}{0{,}42X} = \frac{38}{42} \approx 0{,}9 = 90\%$$

Resposta: B.

OBS: Muita atenção com o que pede o enunciado. Veja que ele pede as empresas que são administradas por homens, não as exclusivamente administradas por homens. Isso faz diferença.

Considere o texto para responder às questões **41** e **42**.

A London Eye é a quarta maior roda gigante do mundo e um dos principais pontos turísticos de Londres, na Inglaterra. Ela contém 32 cabines, que representam os distritos de Londres, atinge uma altura máxima de 135 metros e sua volta completa leva 30 minutos.

(https://en.wikipedia.org. Adaptado.)

41.

Considerando que as cabines se movimentem com velocidade constante, a altura H, em metros, alcançada por uma cabine que acabou de sair do ponto mais baixo da roda gigante (altura = 0 m) pode ser descrita em função do tempo t, em minutos, por uma função senoidal. Essa função é representada por

a)

$$H(t) = 135 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi \cdot t}{15}\right)$$

b)

$$H(t) = 135 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot t}{32}\right)$$

c)

$$H(t) = \frac{135 + 135 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi \cdot t}{15}\right)}{2}$$

d)

$$H(t) = 135 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi \cdot t}{15}\right)$$

e)

$$H(t) = \frac{135 + 135 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi \cdot t}{15}\right)}{2}$$

Resolução:

A questão afirma que a função que descreve a altura em função do tempo é senoidal.

Vamos analisar as alternativas e tentar ver qual atende todos os requisitos:

1) Ao iniciar o movimento (t=0), a roda sai de seu ponto mais baixo (H=0). Assim,

$H(0) = 0;$

Item a:

$$H(0) = 135 \,.\, sen\,(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi.0}{15}) = 135 \,.\, sen\,(\frac{3\pi}{2})$$

Mas $sen\,(\frac{3\pi}{2}) = sen(270°) = -1$

Assim,

$H(0) = 135.(-1) = -135$ **(não serve!)**

Item b:

$H(0) = 135.sen(0) = 0$ **(ok!)**

Item c:

$$H(0) = (135 + 135 \,.\, sen\,(\pi + \frac{\pi.0}{15})).\frac{1}{2}$$

$$= (135 + 135 \,.\, sen\,(\pi)).\frac{1}{2}$$

Mas,

$$sen(\pi) = sen(180°) = sen(0°) = 0$$

Assim,

$H(0) = \frac{135}{2}$ **(não serve!)**

Item d:

$H(0) = 135 \,.\, sen\,(\pi + \frac{\pi.0}{15}) = 135 \,.\, sen\,(\pi) = 0$**(Ok!)**

Item E:

$$H(0) = \frac{1}{2}(135 + 135 . sen\,(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi . 0}{15}))$$

$$H(0) = \frac{1}{2}(135 + 135 . sen\,(\frac{3\pi}{2}))$$

$H(0) = \frac{1}{2}(135 - 135) = 0$**(ok!)**

Descartamos os itens a e c.

2) Como a roda demora 30 minutos para dar uma volta completa, para dar meia volta, demorará metade do tempo, ou seja, 15 minutos. Além disso, ao dar metade de uma volta, ela estará no ponto de altura máxima (135m)

Assim, devemos ter:

$$H(15) = 135$$

Vamos aos testes:

Item b:

$$H(15) = 135. sen\,(\frac{15.\pi}{32}) = 135. sen(84{,}375°) \neq 135$$

(não serve!)

Item d:

$$H(15) = 135 . sen\,(\pi + \frac{15\pi}{15})$$

$$= 135 . sen\,(\pi + \pi) = 135\, sen(2\pi) = 135\, sen(360°)$$

$= 135\, sen(0°) = 0$ **(não serve!)**

Por eliminação, só sobrou o item e.

Vamos conferir se serve:

$$H(15) = \frac{1}{2}(135 + 135 \,.\, sen\,(\frac{3\pi}{2} + \frac{15\pi}{15}))$$

$$= \frac{1}{2}(135 + 135 \,.\, sen\,(\frac{3\pi}{2} + \pi))$$

$$= \frac{1}{2}(135 + 135 \,.\, sen\,(270° + 180°))$$

$$= \frac{1}{2}(135 + 135 \,.\, sen\,(360° + 90°))^*$$

$$= \frac{1}{2}(135 + 135 \,.\, sen\,(90°)) = \frac{1}{2}(135 + 135) = 135$$

Ok!

* Lembre-se de que:

$$sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$$

$$\rightarrow sen(360 + b) = sen(360)cos(b) + sen(b)cos(360)$$

$$= sen(b)$$

Resposta: E.

42.

Considerando que a altura máxima corresponde ao diâmetro da London Eye e que as 32 cabines estão igualmente espaçadas, o comprimento do arco formado por duas cabines consecutivas é um valor entre

a) 4 metros e 5 metros.

b) 24 metros e 25 metros.

c) 13 metros e 14 metros.

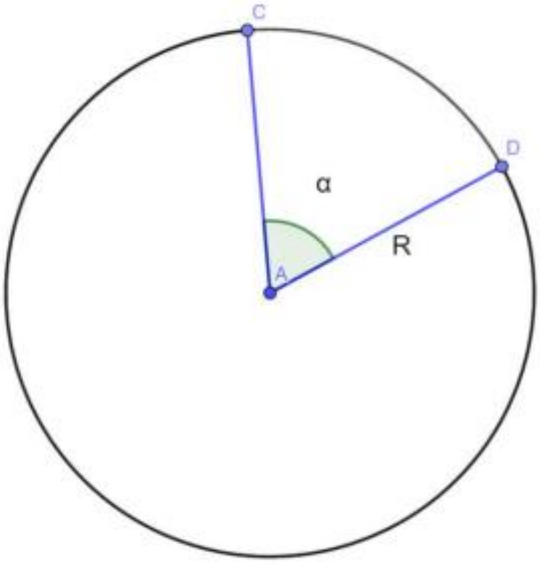
d) 6 metros e 7 metros.

e) 44 metros e 45 metros.

Resolução:

Como calcular o comprimento de arco?

Lembrete:



Para calcular o comprimento do arco, com α **em radianos**, podemos usar uma regra de três: Se o ângulo for 2π, temos 1 volta inteira na circunferência, o que equivale ao comprimento do círculo, que é $2\pi R$. Para um ângulo qualquer dado, qual será o comprimento do arco?

2π--------------------- $2\pi R$

α ---------------------- L

$\frac{L}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi} \to L = R\alpha$, em que R é o raio do círculo.

Queremos saber o tamanho do arco entre 2 cabines. Logo, só precisamos saber do ângulo entre 2 cabines.

Ora, se há 32 cabines na circunferência e todas estão igualmente espaçadas, entre cada cabine há um ângulo de:

$$\frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}\ radianos$$

Assim, o comprimento do arco é

$$L = R.\frac{\pi}{16}$$

Mas $R = \frac{135}{2}$

$$\rightarrow L = \frac{135}{2} \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{135}{32}\pi = 4{,}2\pi$$

Como $\pi \approx 3{,}14 \rightarrow L = 4{,}2 \,.\, 3{,}14 = 13{,}25\, m$

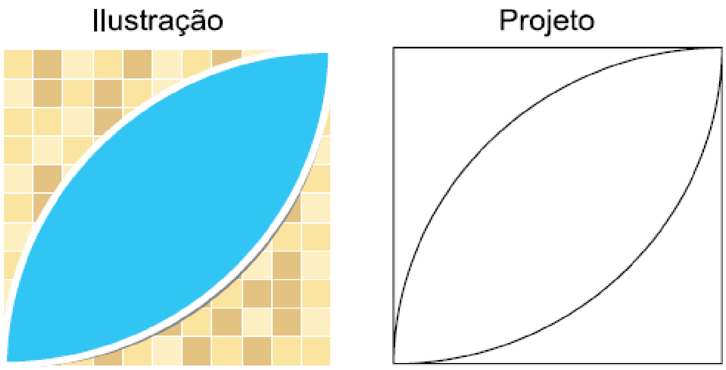
que está entre 13 e 14 m.

Resposta: C

OBS: Não confunda o π em radianos com π = 3,14. O último é usado em medidas de comprimento/área/volume, e o primeiro é somente para ângulos.

43.

Um arquiteto fez o projeto de uma piscina a pedido de um cliente, conforme a figura.



A área destinada à piscina é obtida a partir da região comum de dois setores circulares, delimitada por um quadrado. Considerando $\pi = 3{,}14$, a superfície da piscina que será construída ocupará

a) 78,5% da área do quadrado que a delimita.

b) 21,5% da área do quadrado que a delimita.

c) 71,5% da área do quadrado que a delimita.

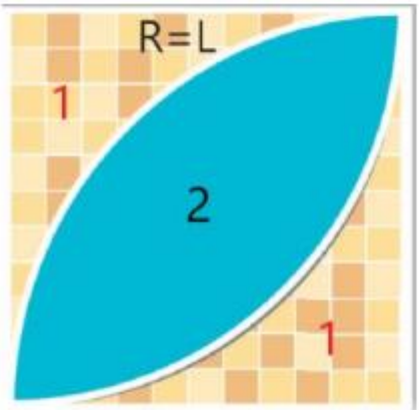
d) 57,0% da área do quadrado que a delimita.

e) 28,5% da área do quadrado que a delimita.

Resolução:

A parte da piscina é dada pela interseção de dois setores circulares, que são idênticos, pois seus raios equivalem ao lado do quadrado em que se inserem.

A figura é simétrica e podemos dividir ela em 2 partes diferentes (1 e 2), conforme a figura:

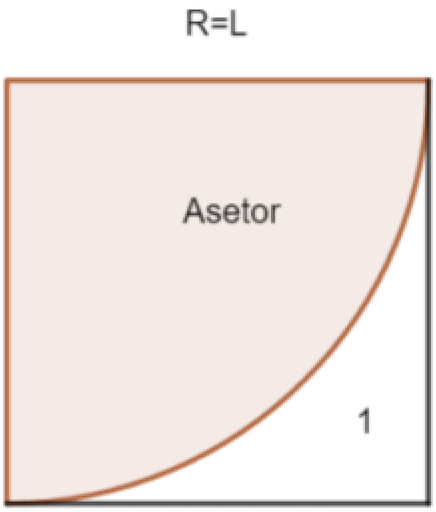


Note que a sacada da questão é perceber que **a área da piscina (2) é igual a área do quadrado menos 2x a área ladrilhada (1), ou seja:**

$$S_2 = S_{Quadrado} - 2.S_1$$

Mas e como calcular a área 1?

Note que cada área 1 é a diferença entre a área de um setor e a do quadrado todo. Veja a figura:



Como o ângulo interno do quadrado é de 90 graus, este setor equivale a um quarto de uma circunferência (ângulo de 360).

Podemos fazer uma regra de 3 para calcular a área do setor:

Ângulo área

360° -------------------------- πL^2

90° -------------------------- A_{set}

$$\frac{A_{set}}{\pi L^2} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \rightarrow A_{set} = \frac{\pi L^2}{4}$$

Já a área do quadrado é dada pelo seu lado elevado ao quadrado:

$$A_{quadrado} = L^2$$

Portanto:

$$A_1 = A_{quadrado} - A_{set} = L^2 - \frac{\pi L^2}{4}$$

Como $\pi = 3{,}14$ (dado na questão),

$$A_1 = L^2 - \frac{3{,}14.L^2}{4} = \frac{4L^2 - 3{,}14L^2}{4}$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{0{,}86L^2}{4}$$

A área 2, então, é calculada por:

$$A_2 = A_{quadrado} - 2A_1 = L^2 - 2.\frac{0{,}86L^2}{4}$$

$$= L^2 - \frac{0{,}86L^2}{2} = L^2 - 0{,}43LL^2 = 0{,}57L^2$$

Assim, o percentual que a piscina ocupará é dado por:

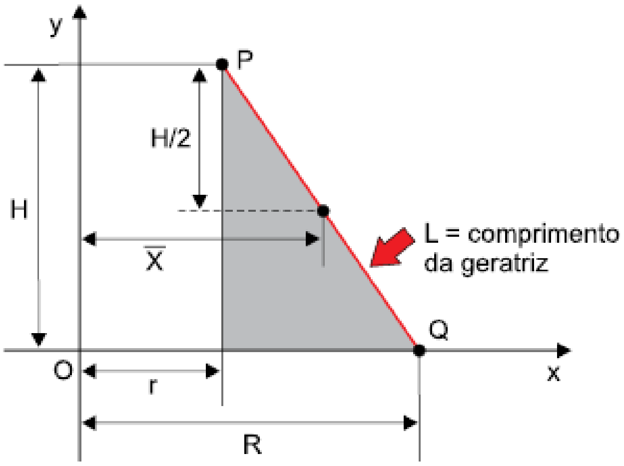
$$\frac{A_2}{A_{quadrado}} = \frac{0{,}57L^2}{L^2} = 0{,}57 = 57\%$$

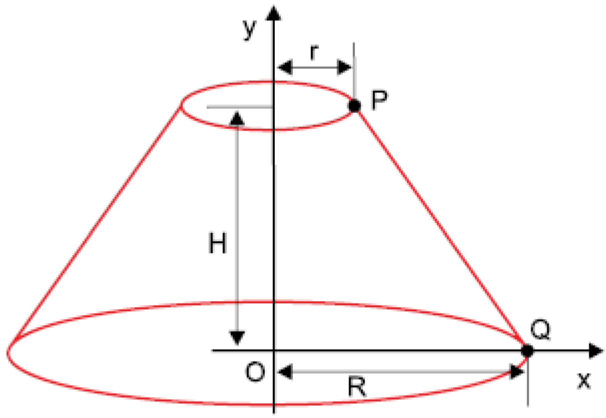
Resposta: D

44.

Uma fábrica de cúpulas está desenvolvendo um novo produto com o formato de um tronco de cone reto vazado, utilizando um novo material. Para calcular o custo dessa nova cúpula, é necessário obter sua área lateral.

De acordo com o Teorema de Pappus-Guldin, a área A da superfície lateral desse tronco é dada por $A = 2\pi \cdot \overline{X} \cdot L$, sendo que as medidas utilizadas na fórmula se relacionam com as medidas do tronco, conforme mostra o esquema.





(www.alfaconnection.pro.br. Adaptado.)

Se para esse produto r = 8 cm, R = 15 cm e H = 24 cm, a área lateral dessa cúpula é igual a

a) 252π cm^2.

b)

c) $575\pi \text{ cm}^2$.

d) $552\pi \text{ cm}^2$.

e) $168\pi \text{ cm}^2$.

$664\pi \text{ cm}^2$.

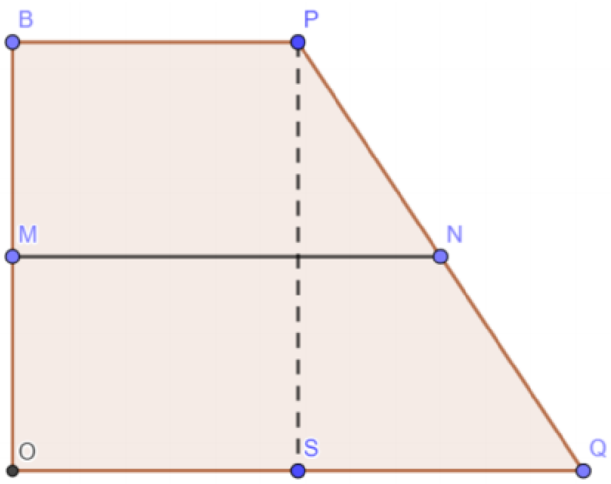
Resolução:

Para resolver a questão, vamos lembrar de uma propriedade bem interessante da geometria plana, a base média:

Lembrete:

“A base média de um trapézio é o segmento paralelo às bases e que divide os lados não paralelos do trapézio pela metade.”

Observe:



MN é base média:

$BM = MO$ e $PN = NQ$

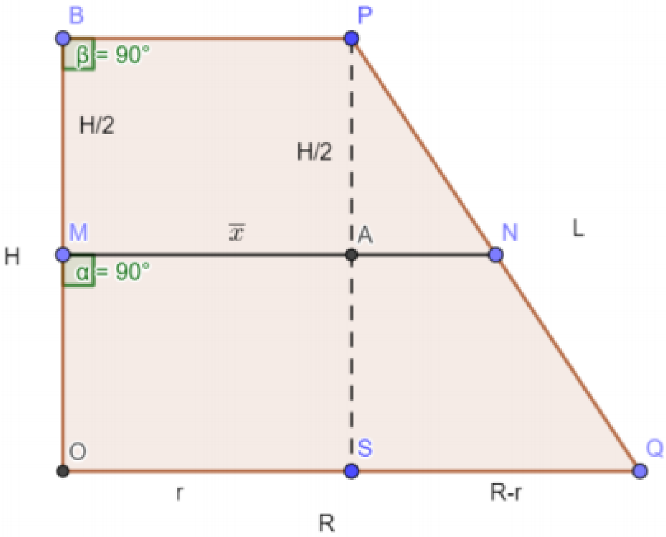
Além disso, a base média goza de uma propriedade interessante:

“A medida da base média do trapézio é a média aritmética das bases do trapézio.”

Nesse caso,

$$MN = \frac{BP + OQ}{2}.$$

Agora, perceba como isso vai ser interessante. Observe a figura do texto:



Note que $x^{\to}$ divide BO pela metade. Além disso, é paralelo às bases BP e OQ. Assim, MN é base média, pois, consequentemente, divide o lado PQ em duas partes iguais (outro jeito de ver isso é por semelhança envolvendo o triângulo grande PSQ e o menor de hipotenusa PN).

Então, como já vimos, se $x^{\to}$ é base média, então:

$$x^{\to} = \frac{BP\ +\ OQ}{2} = \frac{R + r}{2}$$

Como r = 8 e R = 15,

$$x^{\to} = \frac{8\ +\ 15}{2} = \frac{23}{2}$$

Agora, só precisamos do comprimento da geratriz PQ=L para utilizarmos a forma de Pappus.

Note que o triângulo PSQ é retângulo, com PS = H e SQ = R - r (veja a figura).

Assim,

$$PQ^2 = PS^2 + SQ^2 = 24^2 + (15 - 8)^2$$

$$= 24^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625 = 25^2$$

$$\rightarrow PQ\ = L =\ 25$$

Assim, aplicando o teorema de Pappus:

$$A = 2\pi\, \vec{x}.\, L = 2\pi.\frac{23}{2}.25 = 25.23.\pi = 575\pi\ cm^2$$

OBS: Caso você não tivesse ou não se lembrasse da ideia da base média, basta aplicar semelhança de triângulos nos triângulos PAN e PSQ (caso AAA - os três ângulos internos são iguais para os 2 triângulos):

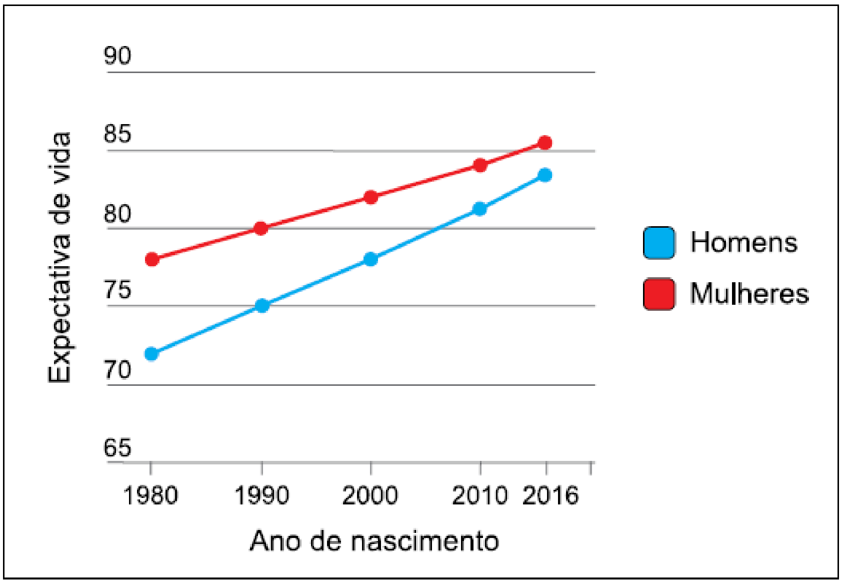
$\frac{PA}{AN} = \frac{PS}{SQ} = \frac{H}{(R-r)}$, com PA = $\frac{H}{2}$ (vide figura).

Para calcular $\vec{x}$, basta somar AN com MA, gerando o segmento MN.

Resposta: B.

45.

Nos países desenvolvidos, a expectativa de vida das mulheres é maior que a dos homens. Contudo, a diferença no tempo de vida de mulheres e homens vem diminuindo nas últimas décadas. O gráfico a seguir apresenta dados sobre a expectativa de vida da população de uma cidade, para homens e mulheres, que ilustra esse cenário.



As curvas que descrevem a expectativa de vida para homens e mulheres correspondem, respectivamente, aos gráficos das funções $H(t) = 72 \cdot e^{0,0041 \cdot t}$ e $M(t) = 78 \cdot e^{0,0025 \cdot t}$, sendo $t = 0$ correspondente ao ano de 1980, $t = 1$ ao ano de 1981 e, assim, sucessivamente.

Segundo a lei da função apresentada para cada curva e utilizando $\ln 2 = 0,69$, $\ln 3 = 1,1$ e $\ln 13 = 2,56$, a expectativa de vida dos homens deverá igualar a das mulheres no ano de

a) 2030.
b) 2050.
c) 2038
d) 2044.
e) 2036.

Resolução:

A expectativa de vida será igualada quando as funções H e M apresentarem um mesmo valor, ou seja:

$$H(t) = M(t)$$

Assim, usando as expressões do texto:

$$72.e^{0,0041.t} = 78.e^{0,0025.t}$$

Passando todos os termos de "e" para o lado esquerdo e todos os números para o lado direito,

$$\frac{e^{0,0041.t}}{e^{0,0025.t}} = \frac{78}{72} = \frac{6.13}{6.12} = \frac{13}{12} = \frac{13}{2.2.3}$$

$$\rightarrow e^{(0,0041t - 0,0025t)} = e^{(0,0016t)} = \frac{13}{2.2.3}$$

Agora, como os dois termos são positivos, podemos aplicar o logaritmo natural (ln) nos dois lados da equação:

$$ln(e^{(0,0016t)}) = ln(\frac{13}{2.2.3})$$

Lembrete:

Algumas propriedades essenciais quando se trabalha com logaritmos:

$$ln\,(x^n) = n.ln\,(x)$$

$$ln\,(a.b) = ln\,(a) + ln\,(b)$$

$$ln\,(\frac{a}{b}) = ln\,(a) - ln\,(b)$$

$$ln\,(e) = log_e^e = 1$$

Então,

$$0{,}0016.t.ln\,(e) = ln(13) - ln\,(2.2.3)$$

$$\rightarrow 0{,}0016t = ln(13) - [\,ln(2) + ln(2) + ln(3)]$$

Usando os valores fornecidos no texto:

$$\rightarrow 0{,}0016t = 2{,}56 - [\,2\,.\,0{,}69 + 1{,}1]$$

$$= 2{,}56 - 2{,}48 = 0{,}08$$

$$\rightarrow t = \frac{0{,}08}{0{,}0016} = 50$$

O ano será dado por:

$$ano = 1980 + t = 1980 + 50 = 2030$$

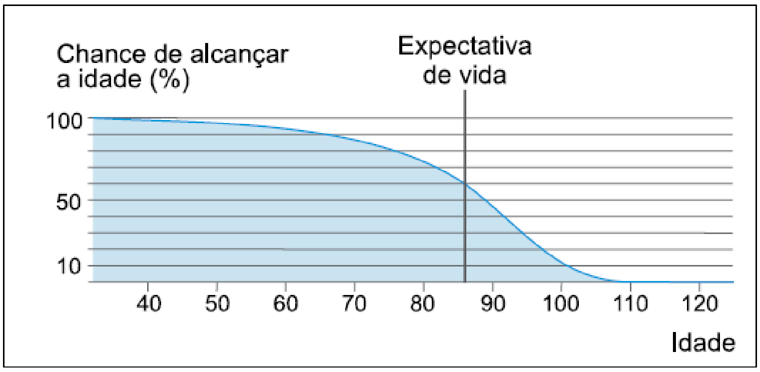
Resposta: A

46.

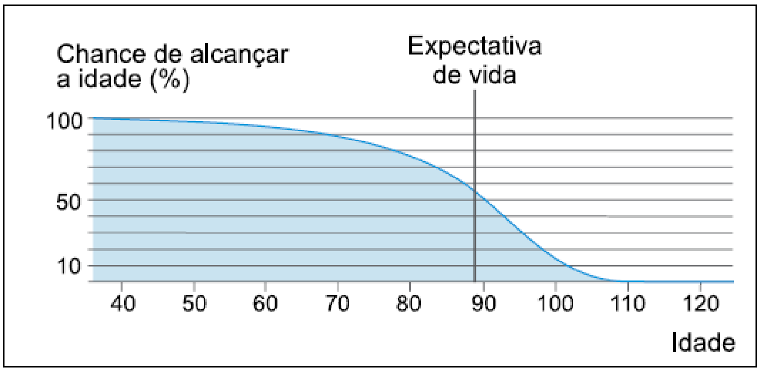
O site Office for National Statistics é um dos maiores fornecedores de estatísticas do Reino Unido. Uma das ferramentas disponíveis nesse site apresenta a probabilidade de uma pessoa do Reino Unido atingir determinada idade a partir de sua idade atual.

Veja o exemplo a seguir para um casal em que o homem tem 32 anos e a mulher 36 anos.

Homem de 32 anos



Mulher de 36 anos



(www.ons.gov.uk. Adaptado.)

Considerando as informações apresentadas e que os eventos são independentes, a probabilidade de que ambos atinjam a expectativa de vida prevista pelo site é de, aproximadamente,

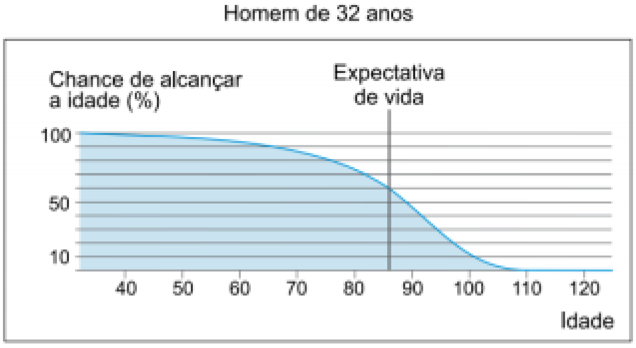
a) 20%.
b) 25%.
c) 60%.
d) 55%
e) 35%

Resolução:

Primeiramente, devemos interpretar o gráfico e achar qual a probabilidade de o homem atingir a expectativa e qual a probabilidade de a mulher fazer isso.

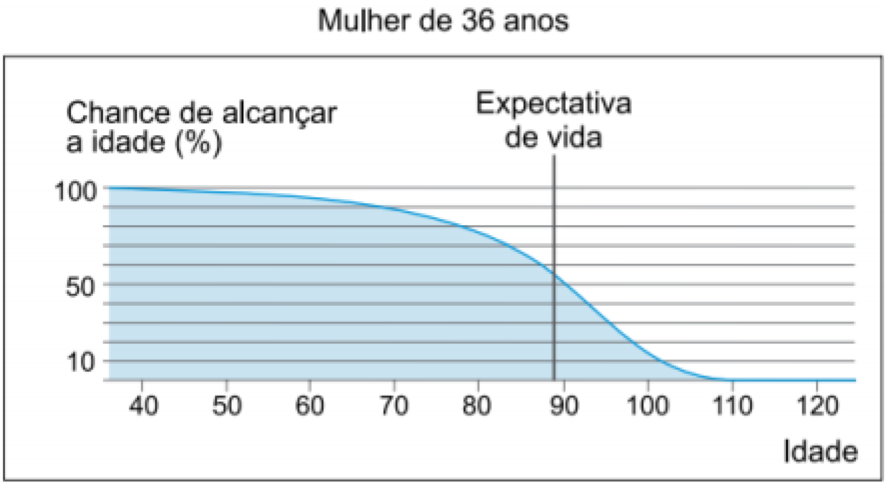
Note que cada linha horizontal que se sobe no gráfico significa um aumento de 10% na chance (há 10 linhas, 10 a 100 %).

Logo, no caso do homem:



A chance para alcançar a expectativa é o ponto de encontro da curva azul com a reta de expectativa de vida, que ocorre na chance de 60%.

No caso da mulher:



O encontro acontece na metade do caminho entre a linha de 50 e 60%, aproximadamente. Podemos supor que a chance é de 55%.

Agora um lembrete:

"Dois eventos são independentes se a realização de um não interfere na realização do outro, em termos de probabilidade."

Na prática, a definição matemática para eventos independentes é

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

Se quisermos interpretar isso, pense que a interseção entre A e B é justamente a situação de A **e** B ocorrerem. Mas, como são independentes, o acontecimento de um não influencia o acontecimento do outro. Logo, a probabilidade de ocorrer A e B é o produto das probabilidades dos dois.

Portanto, a chance de que ambos atinjam a expectativa de vida é:

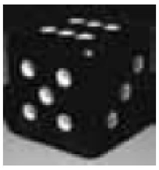
$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 0{,}60 \,.\, 0{,}55 = 0{,}33 = 33\%$$

$$P(A \cap B) \approx 35\%$$

Resposta: E

Considere as informações a seguir para responder às questões **47** e **48**.

Um experimento envolve o lançamento de 3 dados de 6 faces, sendo P(i) a probabilidade de a face com o número i ficar para cima para o respectivo dado. Os dados possuem as seguintes características:

Tipo de dado	Característica
	Honesto, ou seja, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$
	Viciado, em que $P(1) = P(2) = P(3) = x$ e $P(4) = P(5) = P(6) = 2x$
	Viciado, em que $P(6) = 3 \cdot P(1)$ e $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$

47.

Ao lançar esses três dados, a probabilidade de se obter a face 6 para cima em todos eles é um valor

a) entre 5% e 10%.
b) entre 1% e 5%.
c) entre 10% e 15%.
d) entre 15% e 20%.
e) inferior a 1%.

Resolução:

Como o lançamento de cada dado é independente (nenhum resultado dos dados depende dos outros), vamos calcular a probabilidade de o lançamento dar 6 em cada dado.

Dado 1: Como é um dado honesto, a probabilidade de dar 6 é

$P(6) = \frac{1}{6}$ (veja a tabela)

Dado 2:

Sabemos que, caso somarmos as probabilidades de cada caso possível, devemos contemplar todos os casos possíveis, logo, o resultado é 100 %, ou 1. (Pense que, se estou somando a probabilidade de todos os casos, então eu tenho 100% de chance que algum entre todos os casos ocorra).

Sabendo disso,

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

Usando os dados da tabela,

$$x + x + x + 2x + 2x + 2x = 1$$

$$\rightarrow 9x = 1 \rightarrow \frac{1}{9} = x$$

Como $P(6) = 2x$,

$$P(6) = \frac{2}{9}$$

Dado 3:

Análogo ao caso anterior. Temos:

$$P(1)\ + P(2)\ + P(3)\ + P(4)\ + P(5)\ + P(6)\ = 1$$

Sabendo que $P(6)\ =\ 3\ P(1)$,

$$\rightarrow P(1)\ =\ \frac{P(6)}{3}$$

e

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$$

Assim,

$$\frac{P(6)}{3}\ + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + P(6)\ =\ 1$$

$$\rightarrow \frac{4}{6} + \frac{3P(6)\ +\ P(6)}{3} = 1$$

Multiplicando os dois lados por 6,

$$4\ +\ 2.(4\,.P(6)) = 6 \rightarrow 4P(6)\ =\ 1$$

$P(6)\ =\ \frac{1}{4}$.

Assim, temos que a probabilidade dos três ocorrerem é:

$$P\ =\ \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{216} = \frac{1}{108} = 0{,}0092\ = 0{,}92\%$$

O que é inferior a 1%.

Resposta: E

48.

O dado azul será manipulado de forma que a probabilidade de a face 6 ficar para cima seja igual a $\frac{3}{4}$ e que as probabilidades de as demais faces ficarem para cima sejam todas iguais a um mesmo valor. Nesse caso, se adotarmos que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p$ e que $P(6) = k \cdot p$, então será necessário que k seja igual a

a) 4,5.
b) $26,\overline{6}$.
c) 15,0.
d) 26,0.
e) 3,0.

Resolução:

Vamos utilizar o mesmo processo usado para os dados 2 e 3 na questão anterior:

Sabemos que:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p$$

e

$$P(6) = \frac{3}{4}$$

Sabendo que:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1,$$

Temos:

$$\frac{3}{4} + p + p + p + p + p = 1$$

$$\rightarrow 5p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow p = \frac{1}{5.4} = \frac{1}{20}$$

A questão pede o valor de k tal que:

$$P(6) = k.p \rightarrow \frac{3}{4} = k\,\frac{1}{20}$$

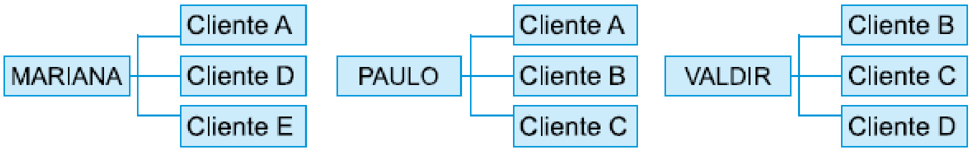
$$\rightarrow k = \frac{3.20}{4} = 3.5 = 15$$

Resposta: C.

49.

Uma agência financeira dispõe de sócios localizados em várias cidades para orientar a administração da carteira de investimentos de seus clientes. Os sócios possuem determinado raio de atuação e, a partir dessa informação, a empresa elenca os sócios disponíveis para atender seus novos clientes. Mariana, Paulo e Valdir são três dos sócios de que essa empresa dispõe.

Para essa agência, cada cliente deve ser atendido por um único sócio, sendo que nenhum cliente deve ficar sem atendimento. Na última semana, 5 novos clientes (A, B, C, D e E) abriram contas nessa agência. O esquema indica qual cliente está na área de atuação de cada um desses três sócios:



De quantas maneiras a distribuição da carteira de investimentos desses cinco novos clientes pode ser feita, de modo que esses três sócios fiquem com o atendimento de pelo menos um novo cliente?

a) 14.
b) 12.
c) 15.
d) 13.
e) 16.

Resolução:

Nessa questão, não há segredo. Vamos listar todas as distribuições possível.

Uma coisa muito importante: Organização!

Quando há muitos casos, temos que nos organizar de forma a não esquecer nenhum. Por isso, fazemos a chamada “árvore” de possibilidades.

Note que não precisamos fazer uma árvore em si, isso pode ser feito em uma tabela. Mas a árvore vai se ramificando a cada nível. Isso é o que tem que se fazer: começar em casos simples e depois ir ramificando.

Lembrando que nenhum cliente deve ficar sem atendimento. Isso implica, por exemplo, que Mariana deve sempre atender o cliente E, pois esse cliente não está na área de atuação de Paulo nem de Valdir.

Assim, vamos começar a árvore por Mariana. Começamos por ela atendendo 1 cliente somente (nesse caso deve ser o E), depois com 2 clientes e depois com 3 clientes, analisando o que pode acontecer com Paulo e depois Valdir.

- Se Mariana não atender A, Paulo deve atender A;
- Se mariana não atender D, Valdir deve atender D;
- Não deve haver cliente com 2 sócios.

A tabela a seguir indica as possibilidades:

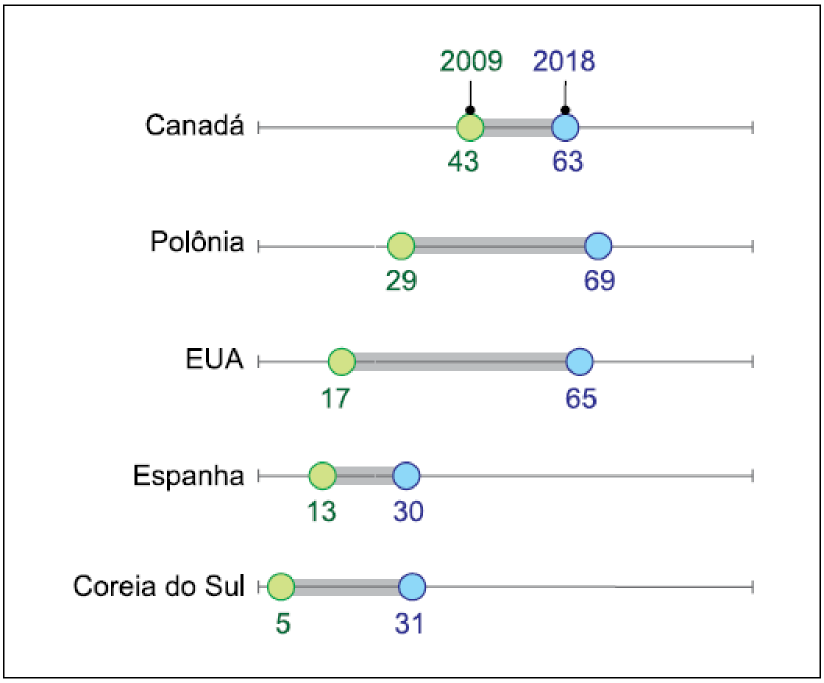
Mariana	Paulo	Valdir	Total de casos
E	A	B, C e D	1
E	A, B	C, D	1
E	A, C	B, D	1
E	A, B e C	D	1
A, E	B	C, D	1
A, E	C	B, D	1
A, E	B, C	D	1
D, E	A	B, C	1
D, E	A, B	C	1
D, E	A, C	B	1
A, D e E	B	C	1
A, D e E	C	B	1

Assim, o total de casos listados é 12.

Resposta: B.

50.

Em muitos países, o clima econômico melhorou desde os primeiros dias da crise financeira de 2009. O gráfico a seguir mostra um comparativo do percentual da população de cinco países que avalia como boa a situação econômica de seu país em 2009 e 2018.



(www.pewresearch.org. Adaptado.)

Os países que apresentaram a maior e a menor variação no percentual da população que avalia como boa a situação econômica de seu país no período analisado são, respectivamente,

a) Polônia e Canadá.
b) Canadá e Coreia do Sul.
c) Polônia e Espanha.
d) EUA e Espanha.
e) EUA e Coreia do Sul.

Resolução:

A variação no percentual nada mais é que a diferença entre o percentual de 2018 e 2009.

Logo, vamos listar essas variações de cada país:

Canadá: $63\% - 43\% = 20\%;$

Polônia: $69\% - 29\% = 40\%;$

Eua: $65\% - 17\% = 48\%;$

Espanha: $30\% - 13\% = 17\%;$

Coréia do Sul: $31\% - 5\% = 26\%;$

Portanto, a maior variação é dos EUA (48%) e a menor é da Espanha (17%).

Resposta: D.